幾何学特別講義 **I** 小テスト（**2018** 年 **11** 月 **2** 日）

担当：境 圭一

行列またはベクトルに値を持つ関数 $X(t)=\left(x_{ij}(t)\right)_{i,j}$ に対し，$X(t)$ の t に関する微分を $X'(t):=\left(x'_{ij}(t)\right)_{i,j}$ で定義する．**弧長パラメータを持つ正則曲線** $c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, つまり $|c'|=1$ をみたす曲線に対し，$c'(t)$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転して得られるベクトルを $n(t)$ とおき，**単位法ベクトル**と呼ぶ．$c''(t)=\kappa(t)n(t)$ をみたす関数 $\kappa\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在し，これを c の**曲率**と呼んだ．

(1) $c(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ が弧長パラメータを持つとき，$n(t)$ を $x(t)$ と $y(t)$ を用いて表せ．これを用いて $n'(t)=-\kappa(t)c'(t)$ であることを示せ．

(2) c が弧長パラメータを持つとき，2×2 行列に値を持つ関数 $A(t)$ を $A(t):=\begin{pmatrix}c'(t) & n(t)\end{pmatrix}$ で定義する．${}^{\tau}\!A(t)A(t)=E_2$ であることを示せ．ただし ${}^{\tau}\!A(t)$ は $A(t)$ の転置行列，E_2 は 2 次単位行列である．

(3) $X:=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ とおくとき，(2) の $A(t)$ は $A'(t)=\kappa(t)A(t)X$ をみたすことを示せ．

(4) $c_1,c_2\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は弧長パラメータを持つ曲線で，同じ曲率 $\kappa_1=\kappa_2=\kappa$ を持ち，さらに次をみたすものとする：

$$c_1(0)=c_2(0),\quad c'_1(0)=c'_2(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

(i) c_1,c_2 に対する (2) の行列を $A_1(t),A_2(t)$ とおくとき，$A_1(t)\,{}^{\tau}\!A_2(t)$ は t によらないことを示せ．これを用いて $A_1(t)=A_2(t)$ であることを示せ．
（ヒント：$A_1\,{}^{\tau}\!A_2$ が t によらないとすれば，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $A_1(t)\,{}^{\tau}\!A_2(t)=A_1(0)\,{}^{\tau}\!A_2(0)$ である）

(ii) $c_1(t)=c_2(t)$ であることを示せ．

配点：各 5 点，計 25 点