幾何学特別講義 **I** 小テスト（**2018** 年 **11** 月 **2** 日）解答例

担当：境 圭一

(1) $n = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} c' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ である．$c'' = \kappa n$ に代入すると $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ だから，$n' = \begin{pmatrix} -y'' \\ x'' \end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix} -x' \\ -y' \end{pmatrix} = -\kappa c'$.

(2) $|c'| = |n| = 1$ と $c' \perp n$ から，${}^\tau A_i A_i = \begin{pmatrix} {}^\tau c' \\ {}^\tau n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c' & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot n \\ n \cdot c' & n \cdot n \end{pmatrix} = E_2$.

(3) $\kappa AX = \kappa\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix} -y' & -x' \\ x' & -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa n & -\kappa c' \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} c'' & n' \end{pmatrix} = A'$. $(*)$ は κ の定義と (1) による．

(4) (i) (3) と積の微分公式，ならびに ${}^\tau X = -X$ より

$$(A_1\, {}^\tau A_2)' = A_1'\, {}^\tau A_2 + A_1\, {}^\tau A_2' = \kappa A_1 X\, {}^\tau A_2 + A_1 \kappa\, {}^\tau(A_2 X) = \kappa A_1 (X + {}^\tau X)\, {}^\tau A_2 = O.$$

よって $A_1\, {}^\tau A_2$ は t によらないから，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $A_1(t)\, {}^\tau A_2(t) = A_1(0)\, {}^\tau A_2(0)$. c_i の単位法ベクトルを n_i とおくと，$c_i'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることから $n_i(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり $A_i(0) = E_2$. よって $A_1(t)\, {}^\tau A_2(t) = A_1(0)\, {}^\tau A_2(0) = E_2$. (2) より ${}^\tau A_2(t) = A_2(t)^{-1}$ であるから $A_1(t) = A_2(t)$ を得る．

(ii) $c_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ とおく．(4) より $A_1 = A_2$ の第 1 列を比べて $x_1' = x_2', y_1' = y_2'$ を得る．両辺を積分して微分積分学の基本定理を用いれば

$$\int_0^t x_1'(s)ds = \int_0^t x_2'(s)ds \text{ より } x_1(t) - x_1(0) = x_2(t) - x_2(0), \quad \text{同様に} \quad y_1(t) - y_1(0) = y_2(t) - y_2(0),$$

よって $c_1(t) - c_1(0) = c_2(t) - c_2(0)$ を得る．$c_1(0) = c_2(0)$ だったから $c_1(t) = c_2(t)$.

補足．弧長パラメータを持つ曲線 c について，初期条件 $c(0), c'(0)$ が与えられると，あとは曲率 κ が c を完全に決めてしまう．この事実を微分積分と線形代数の初歩を使って示す問題である．κ が与えられると，曲率の定義である $c'' = \kappa n$ は x, y に関する 2 階の線形常微分方程式系になっているので，その一般論から同じ結論を得ることもできる．$c_1'(0) = c_2'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は条件過多で，実際は $c_1'(0) = c_2'(0)$ でありさえすれば (4) (i) で困ることはない．実際このとき $A_1(0) = A_2(0)$ であり，(2) より ${}^\tau A_i(0) = A_i(0)^{-1}$ となるので，

$$A_1(t)\, {}^\tau A_2(t) = A_1(0)\, {}^\tau A_2(0) = A_2(0) A_2(0)^{-1} = E_2$$

を得る．

配点：各 5 点，計 25 点