幾何入門 演習問題 1（2018 年 4 月 13 日）

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}),\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ を計算せよ．

   (2) (1) の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ に対し $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ を計算し，一致しないことを確かめよ．

2.（線形代数の教科書を参照せよ）$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k\in\mathbb{R}^n$ とする．

   (1) $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ が**一次独立**であることの定義を述べよ．また，$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ が**一次従属**であることの定義を述べよ．

   (2) $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ が一次独立であるとき，$i=1,\dots,k$ に対し $\boldsymbol{u}_i\neq\boldsymbol{0}$ であることを示せ．

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}$ などは全て $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．以下を示せ．

   (1) $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, 特に $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$

   (2) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

   (3) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$（ヒント：(2) を使う）

   (4) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$（ヒント：4/13 の講義の補題 1.4 を使う）

   (5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))\cdot\boldsymbol{a}$（ヒント：(4) を使う）

   (6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ （ヒント：(2), (5) を使う）

   (7) $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\end{pmatrix}=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2$

   (8) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が一次独立であるとき，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ は右手系をなす（問題 6 参照）

4. 一次独立な $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対し，2×2 行列 $A:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}$ を考える．$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を二辺とする平行四辺形の面積は $|\det A|$ であることを示せ．$\det A>0$ になるときと $\det A<0$ になるときの違いは何か？

5. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ とする．Cauchy-Schwarz の不等式を使って，次の**三角不等式**を証明せよ：

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|+|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}|$$

6. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$ がこの順で右手系をなすとは，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}>0$ をみたすことと定義される．

   (1) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\in\mathbb{R}^3$ を標準基底とする．$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ はこの順で右手系だが，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ はそうではないことを示せ．

   (2) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ とする．$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ はこの順で右手系をなすことを示せ．この $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を図示し，教科書の図 1.4 と見比べよ．

（提出の必要はありません）

補足．4/13 の講義では，ベクトルを $\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n$ から延びる矢印のように捉えました．今後の講義では，適切な始点をその都度選ぶ必要がでてきます（平行移動してもベクトルは同じとみなす，ということは高校でもやったと思います）．また $\mathbb{R}^n$ の点を，$\boldsymbol{0}$ とその点を結ぶ矢印が表すベクトルと同一視したりします．数学的にはどれも同じベクトルですが，気分が違うわけです．その時々のベクトルが何を表すか見極めるには，深谷先生の教科書がやっているように，物理的（力学的）な視点が役立ちます．

同じものを表す記号が複数ある，というのはよくあることなので注意してください．この講義では，行列 A の行列式は $\det A$ で，転置行列は ${}^tA$ で，ベクトルの内積は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ で表します．線形代数の講義ではそれぞれ $|A|, A^T, \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ などで（あるいは，これら以外で）表したかもしれません．また教科書ではベクトルの長さを $\|\boldsymbol{u}\|$ と表していますが，この講義では $|\boldsymbol{u}|$ と書いています．講義中に現れた記号は断りなく使って構いませんが，他の記号も，それが何を表すかが明確であれば，使っても構いません．ただし，意味が通らない書き方はダメです．**正しい意思疎通のためには，一般的な言い回しを使うべきです**．過去の経験上，内積を“ $\boldsymbol{uv}$ ”のように書いてしまう人が非常に多いのですが，これは意味が通りません．過去もそうだったのですが，今回もかなりしつこく減点しますから注意してください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html

幾何入門 レポート問題 **1**（**2018** 年 **4** 月 **13** 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ とし，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とするとき，$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$ を示せ．（ヒント：4/13 の演習問題 3 (6) を使う）

（4/20 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html