幾何入門 演習問題 2（2018 年 4 月 20 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．$\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^2$ の原点（ゼロベクトル）である．

1. 次の二変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を考える：

$$f(\boldsymbol{u}) := \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad (\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}), \qquad f(\mathbf{0}) := 0.$$

(1) f は $\mathbf{0}$ において連続であることを示せ．（ヒント：極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を使う）

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0}), \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})$ が存在することを示し，その値を求めよ．$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ は $\mathbf{0}$ において連続か？

(3) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\boldsymbol{v}| = 1$ とする．点 $\boldsymbol{u}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における f の $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を定義通り計算せよ．

(4) (3) の方向微分の値が最小になるときの $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(5) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}_0)$ を計算し (4) と比較せよ．

2. (1) 二変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{u}) := x^3 - y$ で定義する．$\mathrm{grad}(f)$ を求めよ．

(2) $k \in \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(k) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) = k\}$ とおく．$f^{-1}(k)$ を図示せよ．

(3) $\boldsymbol{u}_0 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in f^{-1}(k)$ において $f^{-1}(k)$ に接する直線を求めよ．

(4) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}_0)$ は (3) の直線と直交することを示せ．

3. 次のベクトル場を図示せよ．ただし (3), (4) では原点での値は考えない．

(1) $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$　(3) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$（ヒント：$|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})|$ の値は？）

(4) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$（ヒント：原点近くでの $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})|$ の値は？原点から遠いところでは？）

4. (1) $f(\boldsymbol{u}) = xy$ とおく．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\ (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおき，f を r, θ を使って表せ．

(2) (1) の結果を $g(r,\theta)$ とおく．θ を一つ固定する．$z = g(r,\theta)$ のグラフを rz 平面に描け．（θ で場合分けせよ）

(3) (2) で描いたグラフを全ての θ について考えることにより，$z = f(\boldsymbol{u})$ のグラフを完成させよ．

(4) $\mathrm{grad}(f)$ を図示せよ．また $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めよ．

5. 次の $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，そのグラフを描け．また $\mathrm{grad}(f)$ を図示し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ．

(1) $f(\boldsymbol{u}) = x^2 - y^2$　(2) $f(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^2}$（ただし $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ とする）　(3) $f(\boldsymbol{u}) = y^3 + y^2 + xy$　(4) $f(\boldsymbol{u}) = x^2y$

(3), (4) のヒント：定数 k に対し，平面 $y = k$ で切った切り口を考える．k で場合分けせよ．

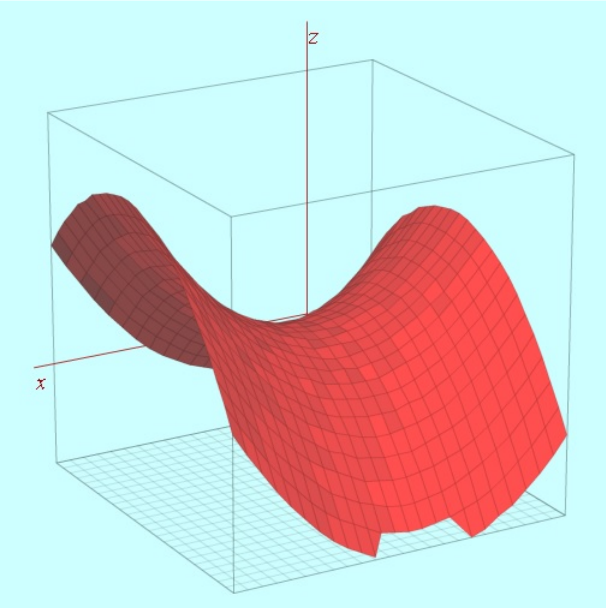
（提出の必要はありません）

補足．「場」というのは物理の用語で，各点において何らかの値が定まるような対応のことを言います．数学的には「関数」または「写像」と同義です．例えば地球上の点 $\boldsymbol{u}$ における風の強さ $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u})$ や重力 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})$ などは，各点 $\boldsymbol{u}$ において向きと大きさを持つ値，すなわちベクトルが定まるような対応なので「ベクトル場」と呼びます．これらの例から，$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とするとき，（気持ちとしては）ベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ の始点は $\boldsymbol{u}$ だと考えておくとよいことがわかります（そんなことは定義のどこにも書かれていないが）．別の例として，点 $\boldsymbol{u}$ における気温 $T(\boldsymbol{u})$ は，各点においてスカラー（実数）が定まるような対応なので「スカラー場」と呼びます．数学ではスカラー場のことを通常は関数と呼びます．ベクトル場のことはベクトル値関数と呼んだりもします．

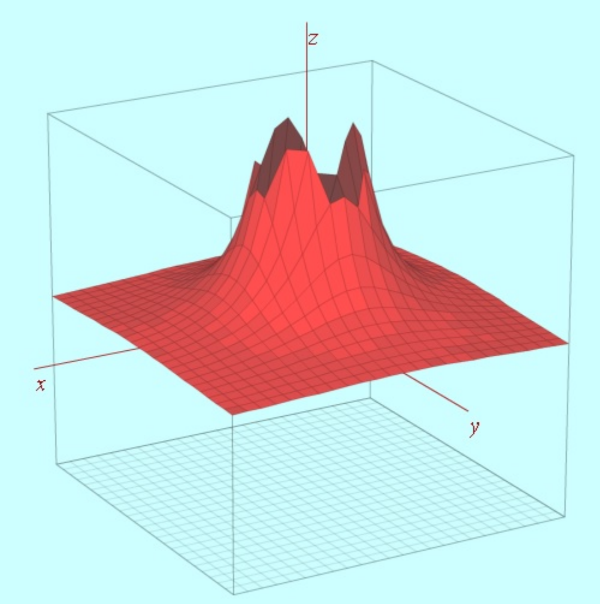
関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ があるとベクトル場 $\mathrm{grad}(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ができます．講義では，$z = f(x,y)$ のグラフの勾配が最も急になる方向が $\mathrm{grad}(f)$ だということを見ました．つまり，点 $\boldsymbol{u}$ が $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ の方向に動くとき，f の値は最も急激に変化するわけです．一方，もし $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ だとすると，$\boldsymbol{u}$ ではグラフの勾配がないということになります．例えば f が極大値や極小値を取るような $\boldsymbol{u}$ では $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となります．逆は成立せず，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ において f が極大もしくは極小となるとは限りません．その判定は，ある種の 2 階微分を計算することでなされます．このあたりは 1 変数関数の場合と同様です．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html

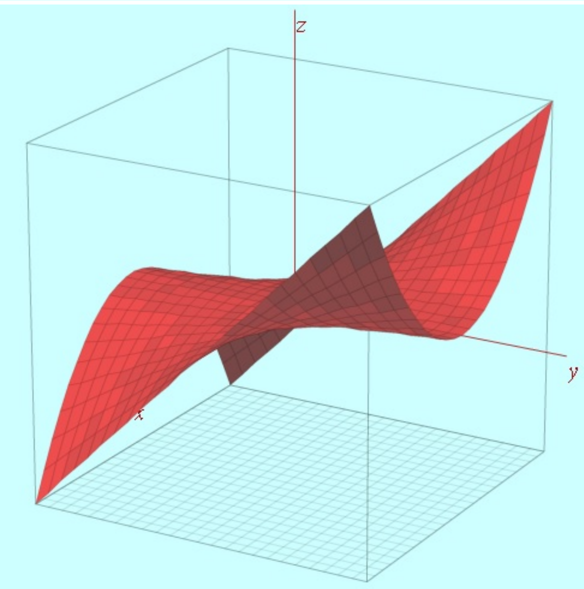
演習問題 **2-5** の関数のグラフ



$z = x^2 - y^2$ のグラフ．z 軸に直交する平面 $z = k$ で切ると，$k \neq 0$ のとき双曲線 $x^2 - y^2 = k$ が現れる．この双曲線は，$k > 0$ のとき x 軸と $(\pm\sqrt{k}, 0)$ で交わり，$k < 0$ のとき y 軸と $(0, \pm\sqrt{-k})$ で交わる．これらは共に $k \to 0$ の極限で，原点で交わる 2 直線 $y = \pm x$（双曲線の漸近線）に「退化」する．



$z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ のグラフ．$x = y = 0$ で発散している．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと $z = \dfrac{1}{r^2}$. 偏角 θ の rz 平面で切った切り口は $z = \dfrac{1}{r^2}$ のグラフ．
また，z 軸に垂直な平面 $z = k$ での切り口は，$k \leq 0$ のとき $\emptyset$, $k > 0$ のときは原点を中心とし半径 $\sqrt{k^{-1}}$ の円である．xy 平面に近いほど半径は大きく，上に行くほど小さくなる．



$z = x^2 y$ のグラフ．y 軸に垂直な平面 $y = k$ で切った切り口は，$k > 0$ のとき「下に凸」な放物線，$k = 0$ のとき直線 $z = 0$, $k < 0$ のとき「上に凸」な放物線である．
また，x 軸に垂直な平面 $x = k$ で切った切り口は，直線 $z = k^2 y$ である，この直線の傾き k^2 は 0 以上で，原点から離れるほど大きくなる．

参考：2 変数関数グラフ Yokatoki Flash 版，
`http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html`

幾何入門 レポート問題 **2**（**2018** 年 **4** 月 **20** 日）

担当：境 圭一

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{y}{x^2+1} - \dfrac{x}{y^2+1}$ で定義する．$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．

（4/27 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html