幾何入門 レポート 2（2018 年 4 月 20 日）コメント

担当：境 圭一

答案の書き方として，

$$\text{（あまりよくない）}\quad \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\ \text{より}\ \begin{cases} 2xy(y^2+1)+(x^2+1)^2=0 \\ (y^2+1)^2+2xy(x^2+1)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

という答案は，意地悪な読み方をすれば，「（何らかの理由で）必ず $\mathrm{grad}(f) = \boldsymbol{0}$ であり，従って $\boldsymbol{u}$ としては $(*)$ をみたすものしか考えることはできない」と主張しているように読めなくもありません．実際はそうではなく，任意の $\boldsymbol{u}$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ というベクトルが定まるが，その中で $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ をみたすものはこれである，と主張したいわけですから，例えば $\mathrm{grad}(f)$ を具体的に求めた上で

$$\text{（よい）}\quad \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\ \text{となるための必要十分条件は}\ \begin{cases} 2xy(y^2+1)+(x^2+1)^2=0 \\ (y^2+1)^2+2xy(x^2+1)=0 \end{cases}\ \text{である．}$$

と書けば間違いないと思います．

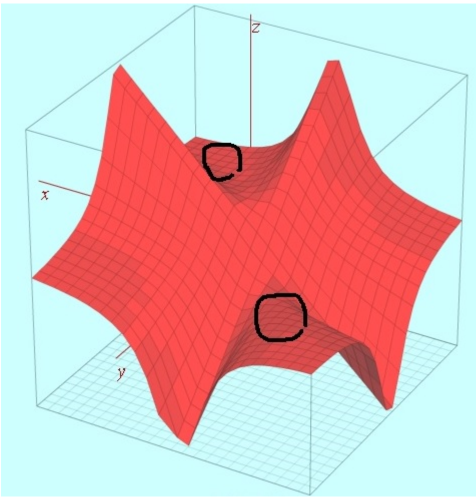
次のようなタイプの誤りが見られました：

$$A, B > 0\ \text{のとき，}\ Ax + By = 0\ \text{をみたす}\ x, y\ \text{は}\ x = y = 0\ \text{に限る}$$

これはもちろん誤りです．例えば $x = -B, y = A$ は $Ax + By = 0$ をみたしますが $(x, y) \neq (0, 0)$ です．このような議論で出た答は，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{u}$ のうちの一部かもしれませんが，すべてかどうかはわかりません．

解き方によりますが，$x = \pm y$ までたどり着いた人のうち，かなり多くの人が $\boldsymbol{u} = (x, x)$ または $\boldsymbol{u} = (x, -x)$ $(x \in \mathbb{R})$ を答としていました．文字が 2 つで式も 2 本あるのですから，基本的には x, y が具体的に求まると期待して計算すべきです．

図は $z = -f(x, y)$ のグラフです（マイナスにしたのは，座標軸が見えるようにするためです）．黒丸で囲ったあたりが $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ です．少しわかりにくいのですが，これらの点ではどの方向にもグラフに勾配がないことが見て取れます．



参考：2 変数関数グラフ Yokatoki Flash 版，

http://www1.kiy.jp/~yoka/GraphYokatoki/GraphYokatoki2_FLASH.html