幾何入門 演習問題 **3**（**2018** 年 **4** 月 **27** 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 次のパラメータ $\boldsymbol{l}$ が定める曲線 $L \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ．
   (1) $\boldsymbol{l}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$　(a, b は定数，$0 < a \le b$)　　(2) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t \end{pmatrix}$
   (3) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$　　(4) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$（ヒント：$x = t^2, y = t^3 - t$ の増減を考えよ）
2. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix}$ と前問 (1) の $\boldsymbol{l}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ 1 - x \end{pmatrix}$ と前問 (2) の $\boldsymbol{l}$（ただし $-1 \le t \le 1$ とする）に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
3. (1) $\boldsymbol{l}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}$ が定める曲線 L を図示せよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (2) $h\colon [0, \pi] \to [-1, 1], h(t) := -\cos t$ は $h' \ge 0$ をみたすことを示せ．$\widetilde{\boldsymbol{l}} := \boldsymbol{l} \circ h$ とおき，$\displaystyle\int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}}$ を計算し (1) と比較せよ．$\hat{h}(t) := \cos t$ の場合はどうか？
4. $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を二変数 C^∞ 級関数，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一変数 C^∞ 級関数，$\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を曲線の正則パラメータ，$a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする．二変数関数 $af + bg, fg, h \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$(af + bg)(\boldsymbol{u}) := af(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{u}), \quad (fg)(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{u}), \quad (h \circ f)(\boldsymbol{u}) := h(f(\boldsymbol{u})), \quad (\boldsymbol{l} \circ h)(t) := \boldsymbol{l}(h(t))$$

   で定める．次のことを示せ：

$$\mathrm{grad}(af + bg) = a\,\mathrm{grad}(f) + b\,\mathrm{grad}(g), \qquad \mathrm{grad}(fg) = g\,\mathrm{grad}(f) + f\,\mathrm{grad}(g),$$
$$\mathrm{grad}(h \circ f) = (h' \circ f)\mathrm{grad}(f), \qquad \frac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{dt} = h' \cdot \Big(\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} \circ h\Big)$$

5. $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}$ が表す曲線 L を図示せよ．任意の C^∞ 級関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$h' > 0$ をみたし，$h(s_0) = 0$ となる s_0 が存在するものに対し，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \circ h)}{ds}(s_0) = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．（従って，L が $\boldsymbol{0}$ において正則でないことは L そのものの性質であって，パラメータには関係しない）
6. 人工衛星を打ち上げるには（重力に対して）仕事が必要だが，周回軌道に乗った後は仕事は必要でない．このことを次のようなモデルで検証しよう．$\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\} := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}\}$ とする．
   (1) 地球の重力のモデルとして，$\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) := -\dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^3}\boldsymbol{u}$ を考える．地球の半径を r とし，高さ h までの打ち上げの軌道として，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ が表す線分 $\boldsymbol{l}\colon [r, r + h] \to \mathbb{R}^2$ を考える．$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．
   (2) $\boldsymbol{m}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ で定まる曲線 $\boldsymbol{m}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ に対し，$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．
   (3) (1) の線積分の $h \to +\infty$ における極限値が有限であることを示し，その物理的な意味を考えよ．

（提出の必要はありません）

補足． 問題 4 について補足します．f, g を 1 変数関数とするとき，線形性 $(af + bg)' = af' + bg'$, 合成関数の微分公式 $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$, 積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ が成り立ちました．これらの公式の類似が grad についても成り立つ，というのが問題 4 です．grad も基本的には微分操作ですから，これらが成り立つことに不思議はないはずです．ベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と二変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，新たなベクトル場 $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}, f\boldsymbol{V}$ がそれぞれ $(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}), (f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ で定義されます．各点 $\boldsymbol{u}$ ごとにベクトルの和やスカラー倍を考えるわけで，$f\boldsymbol{V}$ のほうは各点ごとにスカラーのほうも変化しているわけです．問題 4 の右辺で grad の和を考えたり関数倍したりしているのは，このような意味です．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html`

幾何入門 レポート問題 **3**（**2018** 年 **4** 月 **27** 日）

担当：境 圭一

曲線 $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + y^2 = 1,\ y \leq 0\}$ の正則パラメータ $\boldsymbol{l}(t) \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ で，$\boldsymbol{l}(0) = (-2, 0), \boldsymbol{l}(\pi) = (2, 0)$ をみたすものを一つ与えよ．これを用いて，ベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - 2y \\ x - 4y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

（5/11 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html