幾何入門 レポート **3**（**2018** 年 **4** 月 **27** 日）コメント

担当：境 圭一

演習問題 3 の 1 (1) と同様に考えると，パラメータとして

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

を取れます．$\cos t$ と $\sin t$ が同時に 0 になることはないので $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ ですから，$\boldsymbol{l}$ は正則パラメータです．これを使うと

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t + 2\sin t \\ -2\cos t + 4\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = 3 - \cos 2t - 4\sin 2t$$

となります．これを $0 \leq t \leq \pi$ で積分したものが答です．
L を表す正則パラメータは上の $\boldsymbol{l}$ だけではありません．例えば L は関数 $y = -\sqrt{1-(x/2)^2}$ のグラフですから

$$\bar{\boldsymbol{l}}(t) := \begin{pmatrix} (4t/\pi) - 2 \\ -\sqrt{1 - ((2t/\pi) - 1)^2} \end{pmatrix}$$

によっても表せます．しかし $\bar{\boldsymbol{l}}$ で線積分を計算するのは大変な上に変数変換が必要で，それは結局 $\boldsymbol{l}$ を使うのと同じことです．
曲線を適切なパラメータで表す一般的な方法はなく，その状況に応じて工夫するしかありません．といっても，計算問題としては限られたものしか登場しません（計算できないと問題にならない）．教科書や演習問題に出てくる曲線に慣れておくことが大切でしょう．

気になる答案の例をいくつか挙げます．

- 「$\boldsymbol{l}(t) = -\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{l}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたすパラメータである」という答案が多数ありますが，L を定める条件としては $y \leq 0$ も重要ですから，これに触れないと理解があやふやな印象を与えます．また「正則パラメータ」という条件ですから，$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \neq \boldsymbol{0}$ も見ておくべきでしょう．
- $y \leq 0$ に関連して，次のように書いている人がいましたが，これらはもちろん誤りです：

  （誤り） “$-\sin t \leq 0 \iff 0 \leq t \leq \pi$” や “$-\sin t \leq 0 \implies 0 \leq t \leq \pi$”

  “$0 \leq t \leq \pi \implies -\sin t \leq 0$” なら正解です．
- 内積は “$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$” と書いてください．$\boldsymbol{uv}$ では意味が通じません．

線積分の定義は新しいものですが，計算の内容は高校でやったようなことです．高校の数学と大学の数学は別物ではなく，前者を基礎として後者があります．今までやったことの中に忘れていいものは一つもありません．計算に困った人は，必ず復習しておくようにしてください．