幾何入門 演習問題 4（2018 年 5 月 11 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，また $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

1. 関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，$\Omega_f := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) < 0\}, L_f := f^{-1}(0) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) = 0\}$ とおく．次の関数 f_i について，Ω_{f_i}, L_{f_i} を図示せよ．また L_{f_i} は正則な曲線（の和集合）であることを示せ．Ω_{f_i} は弧状連結か？
   (1) $f_1(\boldsymbol{u}) = 2x + y - 1$　(2) $f_2(\boldsymbol{u}) = 2x^2 + y^2 - 1$　(3) $f_3(\boldsymbol{u}) = x^2 y - 1$
   (4) $f_4(\boldsymbol{u}) := (|\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{e}_1|^2 - 1)(|\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{e}_1|^2 - 1)$　(5) $f_5(\boldsymbol{u}) = (|\boldsymbol{u}|^2 - 16)(|\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{e}_2|^2 - 1)(|\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{e}_2|^2 - 1)$
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(\boldsymbol{u}) := (|\boldsymbol{u}|^2 - 1)^2$ で定義し，$L := f^{-1}(0)$ とおく．$\boldsymbol{u} \in L$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ を計算せよ．L は正則か？
3. (1) $\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．
   (2) $A := [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないことを示せ．（ヒント：$a \in A$ が内点ではない）
   (3) $B := (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．
   (4) $C := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| \geq 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではないことを示せ．
4. Λ を（可算とは限らない）集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{R}^n$ の開集合 U_λ が定まっているとする．このとき，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と $\bigcap_{k=1}^m U_{\lambda_k}$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda)$ はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ．$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が開集合とならない例を挙げよ．
5. $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^2$ を中心とし，半径 1 である円周を S^1 と書き，**1 次元球面**と呼ぶ．すなわち $S^1 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$.
   (1) 次の文は「S^1 は弧状連結である」ことの**誤った**証明である．間違いを指摘せよ．
   「証明（誤り）」任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S^1$ に対し，$\boldsymbol{\gamma}\colon [0, 1] \to S^1$ を $\boldsymbol{\gamma}(t) := (1 - t)\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ で定めると，$\boldsymbol{\gamma}(t)$ は t の 1 次式だから連続で，$\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\gamma}(1) = \boldsymbol{v}$ である．よって S^1 は弧状連結である．
   (2) 実は「S^1 は弧状連結である」という主張は真である．正しい証明を与えよ．
6. (1) $U, V \subset \mathbb{R}^n$ が弧状連結な領域で $U \cap V \neq \emptyset$ であるとき，和集合 $U \cup V$ も弧状連結であることを示せ．
   (2) 弧状連結な領域 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ で，共通部分 $U \cap V$ は弧状連結でないようなものの例を挙げよ．

（提出の必要はありません）

補足．●これ以降の講義で現れる領域や正則曲線として，二変数関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を使って $\Omega_f := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) < 0\}$, $L_f := f^{-1}(0)$ と表されるものが重要です．例えば $\Omega = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\boldsymbol{u}) > 1\}$ という領域や $L = g^{-1}(1)$ という曲線もありますが，$f(\boldsymbol{u}) := 1 - g(\boldsymbol{u})$ とおけば $\Omega = \Omega_f, L = L_f$ ですから，Ω_f, L_f の形のものだけ考えれば十分です．講義の系 4.8 によれば，L_f の各点 $\boldsymbol{u}$ で $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ なら L_f は正則ですが，その逆は成り立たないことに注意してください．つまり，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in L_f$ があったとしても，$\boldsymbol{u}$ において L_f が正則か否かは，別途調べてみないとわかりません．今回の問題 2 をご覧ください．
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対し，多くの場合に L_f は Ω_f の「境界」になります．例えば $f(\boldsymbol{u}) := |\boldsymbol{u}|^2 - 1$ がその例です．しかし，このことはいつも正しいとは限りません．$g(\boldsymbol{u}) := |\boldsymbol{u}|^2$ がその例です．これらの例を図示してみてください．

● $\mathbb{R}^n$ の開集合，弧状連結性などについては，後期の「位相空間論」において，より一般的な視点から論じます．この講義で大切なのは，領域と言ったら弧状連結な開集合のことを指し，従って領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ について (1) 任意の $\boldsymbol{u} \in \Omega$ に対し，$U(\boldsymbol{u}; r) \subset \Omega$ となる $r > 0$ が存在し，(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega$ を結ぶ道 $\boldsymbol{\gamma}\colon [0, 1] \to \Omega$ が存在する，ということです．より重要なのは (1) で，各点 $\boldsymbol{u} \in \Omega$ の「近く」がすべて Ω に含まれることを意味します．例えば $\mathbb{R}^1$ の開区間 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid a < x < b\}$ について，任意の $x \in (a, b)$ に対し，$\epsilon > 0$ を十分小さくとれば（例えば $\dfrac{b - x}{2}$ と $\dfrac{x - a}{2}$ のうち小さいほうを ϵ とすれば）$U(x; \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$ が成り立つので，(a, b) は開集合です．例えば $x \in (a, b)$ が b に非常に近かったとしても，ϵ くらいなら x から右に進んでも (a, b) からはみださない，というわけで，ある意味で「どこまでも先に行ける」という感覚があります．$\mathbb{R}^1$ の開集合ではない集合の例として閉区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid a \leq x \leq b\}$ があります．$x = b \in [a, b]$ については，ほんの少しでも右に行くと $[a, b]$ からはみだしてしまいます．このように，開でない集合については「これ以上は先に行けない限度」のようなものがあったりします．

幾何入門 レポート問題 4（2018 年 5 月 11 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を a とおく．例えば 17S1088P なら $a = 88$, 17S1099Q なら $a = 99$.
$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{u}) = x^2 - y^2 + \cos \pi a$ について，$\Omega_f := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) < 0\}$ で表される領域 Ω_f を図示せよ．Ω_f は弧状連結か？

（5/18 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html