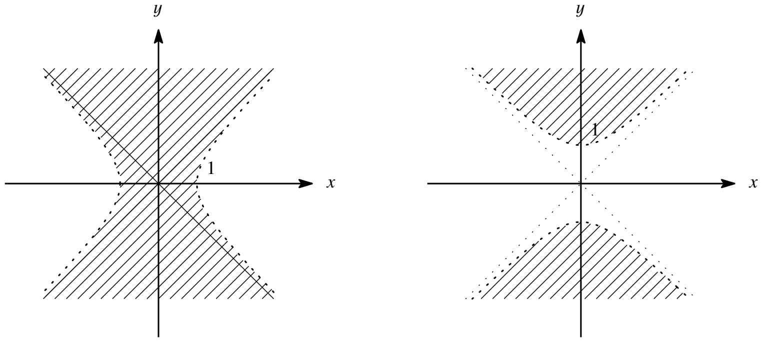
幾何入門 レポート 4（2018 年 5 月 11 日）コメント

担当：境 圭一

a の偶奇に応じて $\Omega_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \pm 1 < 0\}$ です．それぞれ図のようになります：



a が奇数　　　　a が偶数

まずは「境界」$L_f := f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \pm 1 = 0\}$ を描き，そのあと例えば $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ が Ω_f に含まれるかどうか，$f(\mathbf{0}) = \pm 1$ を見て判断すると間違えにくいと思います．L_f を描く際には，例えば $(1,0) \in L_f$ かどうか，つまり $f(1,0) = 0$ かどうか調べると間違えにくいと思います．

絵を見るとほぼ明らかなように，

(i) a が奇数なら Ω_f は弧状連結です．任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega_f$ を結ぶ $\mathbb{R}^2$ 内の線分 L について，$L \subset \Omega_f$ なら L によって $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を結べばよく，$L \not\subset \Omega_f$ の場合は L は一度 Ω_f の外に出ますが，その区間を双曲線の近くをたどる曲線によって補えば，やはり Ω_f 内の曲線で $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を結べることがわかります．

あるいは

(*)　$\forall \boldsymbol{u} \in \Omega_f$ と $\mathbf{0}$ を結ぶ線分は Ω_f に含まれる

ことに気づけば，具体的に次のような折れ線で $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega_f$ を結ぶこともできます：

$$\boldsymbol{l}\colon [-1,1] \to \Omega_f, \quad \boldsymbol{l}(t) := \begin{cases} -t\boldsymbol{u} & -1 \le t \le 0, \\ t\boldsymbol{v} & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

$\boldsymbol{l}$ の定義域 $[-1,1]$ は表示が簡単になるよう選んだだけで，深い意味はありません．他の表し方もあります．

(*) は次のように示せます．$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \Omega_f$ と $\mathbf{0}$ を結ぶ線分上の点は $k\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ $(0 \le k \le 1)$ と表せます．$\boldsymbol{u} \in \Omega_f$ より $a^2 - b^2 < 1$ なので

$$(ka)^2 - (kb)^2 = k^2(a^2 - b^2) < k^2 \le 1$$

です．これは $k\boldsymbol{u} \in \Omega_f$ を意味します．

(ii) a が偶数なら Ω_f は弧状連結ではありません．例えば $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \Omega_f$ を結ぶ $\underline{\mathbb{R}^2 \text{ 内の}}$曲線 $\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ について，$l_2(a) = -2, l_2(b) = 2$ ですから，中間値の定理より $l_2(t) = 0$ となる $t \in [a,b]$ が存在します．この t について $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} l_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \notin \Omega_f$ ですから，$\boldsymbol{l}$ は決して Ω_f 内の曲線にはなり得ません．

双曲線を描くときは，漸近線を描いておき，それに漸近するよう描くべきでしょう．下で述べるように境界は正則曲線ですから，明らかに尖った曲線を描いているものは不可としました．

弧状連結性については，講義で説明した程度の理由は要求することにしました．内容に多少（かなり）不備があっても目を瞑っています．a が奇数の場合に，任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \Omega_f$ から y 軸に垂線を下ろし，その足を y 軸上で結ぶ，という答案も多くありました．もちろん正解です．位相空間論の内容を先取りして連結性を論じている答案もありましたが，その多くは連結性の定義を正しく理解していないように見えましたし，「弧状連結性は連結性を導く」という定理は，ここで証明なしに使うには大きすぎると思います．

曲線 L_f が正則な曲線の和集合であることを示せ，という問題も当然出すべきだったと反省しています．

$\mathrm{grad}(f) = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ ですから，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ しかありません．しかし $\mathbf{0} \notin L_f$ ですから，L_f 上には $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$ となる点は存在しないことになります．よって講義でやった系 4.10 より L_f は正則です．
もっとも，今回の L_f については，$y = \pm\sqrt{1+x^2}$ や $x = \pm\sqrt{1+y^2}$ のグラフだから正則，という説明のほうが簡単でしょう．

k を定数とするとき，$x^2 - y^2 + k < 0$ という不等式は開集合を表します（確かめてみるといいでしょう）．$k < 0$ のときは左上図，$k > 0$ のときは右上図とだいたい似たような絵になります．その「中間」にある $k = 0$ のときは下のようになります．$k < 0$ から始めて k を大きくしていくと，$k = 0$ のときにくびれが原点でちぎれて，$k \geq 0$ では弧状連結でない開集合に変化する様子が見えるでしょうか．