幾何入門 演習問題 5（2018 年 5 月 18 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，また Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とする．

1. (1) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 5x^4 + 8x^3y - 9x^2y^2 + 10xy^3 - 2y^4 \\ 2x^4 - 6x^3y + 15x^2y^2 - 8xy^3 + 5y^4 \end{pmatrix}$ と，$\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ で表される曲線に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を定義通り計算せよ．

   (2) (1) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をひとつ見つけよ．これを利用して $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

2. 次の領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ と，$\boldsymbol{l}$ で表される Ω 上の曲線について，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

   (1) $\Omega := \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$　　(2) $\Omega := \mathbb{R}^2, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix}$ $(|t| \le \frac{\pi}{4})$

   (3) $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{2\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t - 1 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$ $(|t| \le 1)$

   (4) $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|^4}\begin{pmatrix} y(y^2 - x^2) \\ x(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 2)$

3. (1) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を Ω 上の C^∞ 級関数とし，$\boldsymbol{l}\colon [a, b] \to \Omega$ を曲線のパラメータで $\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b)$ をみたすものとする．このとき $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \mathrm{grad}(f) \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ を示せ．

   (2) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{l}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

   (3) (2) の $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．

4. (1) $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を曲線のパラメータとするとき，$\dfrac{d(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})}{dt}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t) + \boldsymbol{l}(t) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)$ を示せ．ただし関数 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{m})(t) := \boldsymbol{l}(t) \cdot \boldsymbol{m}(t)$（右辺は $\mathbb{R}^2$ の内積）で定める．

   (2) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 内の物体 P が，$\boldsymbol{u} \in \Omega$ において力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ を受けて運動しているとする．$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(f)$ であると仮定し，時刻 t における P の位置を $\boldsymbol{p}(t)$ とおくとき，$E(t) := \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t)\right|^2 + f(\boldsymbol{p}(t))$ を P の**エネルギー**とよぶ．E は時刻 t によらず一定である，つまり $\dfrac{dE}{dt} = 0$ であることを，**運動方程式** $\dfrac{d^2\boldsymbol{p}}{dt^2}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}(t))$ が成立することを使って示せ．これを**エネルギー保存則**とよぶ．

   （**注**．エネルギー保存則が $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}(f)$ の仮定のもとで運動方程式から数学的に導かれる定理であること，またベクトル場 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルとは位置エネルギーであることがわかる）

5. 次のパラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で表される曲線を図示せよ．これらは閉曲線を表すことを示し，周期 T を求めよ．

   (1) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ 3\sin 3t \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

   (3) $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} |t - 4n - 2| - 1 \\ |2 - |t - 4n - 1|| - 1 \end{pmatrix}$（ただし n は $4n \le t < 4(n+1)$ をみたす整数）

（提出の必要はありません）

補足．解析学（微分積分学）のスタート地点は 1 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ である，と思います．これを $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の形に一般化するのは自然なアイデアでしょう．$(m, n) = (2, 1)$ の場合が 2 変数関数，$m = n = 2$ の場合が $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場です．このように一般化するにあたり，元の場合で重要だった概念（今の場合，微分 f' や積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ など）はどのように一般化すべきか，を考えるとき，元の場合に成り立っていた重要な定理（今の場合，**微分積分学の基本定理**など）を指標として，これらが大体そのまま成り立つようにする，というのが正しい方法の一つです．このような観点で考えると，5/18 の講義でやった補題 5.1 は，勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}(f)$ や線積分が，2 変数関数やベクトル場の「微分」「積分」として正統なものであることを示していると考えられます．今回の問題 1, 2 のように計算の簡略化に使えるという側面もありますが，これはあくまで副産物です．

幾何入門 レポート問題 5（2018 年 5 月 18 日）

担当：境 圭一

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と，パラメータ $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} t^5 \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ で表される曲線に対し，線積分 $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

（5/25 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html