

$f(x, y) := \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + 1)$ とおけば $\mathbf{V} = \text{grad}(f)$ ですから, 求める値は $f(\mathbf{I}(2\pi)) - f(\mathbf{I}(0)) = \frac{1}{2} \log(1024\pi^{10} + 1)$ です. 答案としては, この 1 行で十分です. f を求める過程は書かなくていいところで, 天下りの f を与えてしまえば十分です.

答案の書き方として「 $f = \dots$ とおくと $\mathbf{V} = \text{grad}(f)$ だから…」のような一文が大切です. よくあるのは

$$\text{(不適切)} \quad f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + 1) \text{ より } \int_{\mathbf{I}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{(*)}{=} f(\mathbf{I}(2\pi)) - f(\mathbf{I}(0)) = \dots$$

のような答案で, これでは (*) の等号が成り立つ理由がわかりません. 境は講義をやっている身なので, \mathbf{V} のポテンシャルを求めているのだということは推測できますが, 他の人が読んだ場合は推測できないかもしれません. 書き手は責任をもって自分の主張を過不足なく説明しなければなりません. 読み手に判断を委ねるような文章は, 一般社会では受け入れてもらえません. また

$$\text{(不適切)} \quad \mathbf{V} = \text{grad}(f) \text{ より } f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + 1)$$

というのは, 話の順序が逆だと思います. $\mathbf{V} = \text{grad}(f)$ をみたら f が存在するか否かは最初は不明なのですから, それが存在するかのよう書き出しは変です.

偏微分の記号は $\frac{\partial f}{\partial x}$ などを使ってください. $\frac{df}{dx}$ のように書いている人が何人かいます.

\mathbf{V} がポテンシャルを持つ場合は積分計算を省略できる, という問題でしたが, 実はこの方法でできる線積分は, 定義通りやっても計算できます. その理由は講義の補題 5.1 の証明を見ればわかります. 積分を計算していくと, 結局どこかで変数変換をすることになり, それがポテンシャルを求めることに他ならないことがわかります. 例えば今回の問題は, 定義通りやっても大した手間なく計算できます.

2 のべき乗はよく出てくるので, $2^{10} = 1024$ くらいまでは何となく覚えておくと便利だと思います.