# 幾何入門 演習問題 6（2018 年 5 月 25 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. $L := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ y = \pm 1\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1,\ |y| \leq 1\}$ とおく．
   (1) $L$ を図示せよ．また $L$ が囲む有界領域 $\Omega$ を図示せよ．
   (2) $L$ を表すパラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的，区分的に正則であり，$\partial\Omega$ の境界の向きを表すものを一つ求めよ．（ヒント：4 つに区切って場合分けして定義するとよい）さらに，その周期を求めよ．
   (3) (2) で定めたパラメータに対し，$\boldsymbol{l}(t) \in L$ における法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ を求めよ．
   (4) $\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
2. 次の領域 $\Omega$ とベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，境界 $L := \partial\Omega$ の向きを表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ を一つ求め，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．
   (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+y \\ -y \end{pmatrix}$　(2) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x+2xy \\ x-y^2 \end{pmatrix}$
   (3) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |\boldsymbol{u}|\}$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}|}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$（問題 3 も参照せよ）
3. $r > 0$ に対し，$L_r := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq r,\ y = \pm r\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm r,\ |y| \leq r\}$ とおく．問題 1 の $L$ は $L_1$ である．
   (1) $L_1$ と $L_2$ で囲まれる有界領域 $\Omega'$ を図示せよ．
   (2) $L_1, L_2$ のパラメータ $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ で，周期的，区分的に正則で，$\partial\Omega'$ の向きを表すようなものを一つ求めよ．
   (3) $\boldsymbol{l}_1$ と問題 1. (2) のパラメータは $L_1$ に同じ向きを定めるか？
   (4) $\Omega'$ の補集合 $\mathbb{R}^2 - \Omega' := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{u} \notin \Omega'\}$（講義では $(\Omega')^c$ と書いた）は有界領域ではないことを示せ．
4. $L$ を正則な曲線とし，$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ を $L$ を表す正則パラメータとする．また $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ に対応する法ベクトルを $\boldsymbol{n}_l$, $\boldsymbol{n}_m$ とする．
   (1) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が $L$ に同じ向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を示せ．（教科書 p. 31 の補題 1.44 参照）
   (2) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ が $L$ に逆の向きを定めるとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_l\, d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}_m\, d\boldsymbol{m}$ を示せ．
5. 曲線 $L$ の正則パラメータ $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ について，この二つが同じ向きを表すとき，$\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ と書くことにする．$\approx$ は**同値関係**であることを示せ．すなわち，以下のことを示せ：
   (i) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{l}$　(ii) $\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{m}$ ならば $\boldsymbol{m} \approx \boldsymbol{l}$　(iii) $\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_2$ かつ $\boldsymbol{l}_2 \approx \boldsymbol{l}_3$ ならば $\boldsymbol{l}_1 \approx \boldsymbol{l}_3$
6. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を，正則な閉曲線 $L_1, \ldots, L_k$ で囲まれた有界領域とする．境界 $\partial\Omega = L_1 \cup \cdots \cup L_k$ の向きは，法ベクトルが $\Omega^c$ に向かうような向きとする，と約束した．ところで，そもそも「$\Omega^c$ に向かう」とは（直感的には明らかだろうが）厳密にはどのように定義したらよいか？

（提出の必要はありません）

**補足．** 講義で与えた線積分（その 2）の定義 6.6 が, 教科書の定義 1.43 と同一のものであることを説明しておきます．一般に曲線のパラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，法ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} l_2'(t) \\ -l_1'(t) \end{pmatrix}$ は $|\hat{\boldsymbol{n}}(t)| = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \cdots (*)$ をみたし，$|\hat{\boldsymbol{n}}(t)|$ は $t$ に依存して変化しますが，$\boldsymbol{l}$ が正則なら 0 にはなりません．よって $\boldsymbol{n}(t) := |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|^{-1}\,\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ というベクトルが定義され（分母が 0 にならない），$\boldsymbol{n}(t)$ は $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ と同じ向きのベクトルで，$t$ によらず $|\boldsymbol{n}(t)| = 1$ です．この $\boldsymbol{n}$ が教科書 28 ページの**単位法ベクトル**です．「単位」というのは長さが 1 であることを指します．$\boldsymbol{n}$ の定義と $(*)$ より $\hat{\boldsymbol{n}}(t) = |\hat{\boldsymbol{n}}(t)|\,\boldsymbol{n}(t) = \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \boldsymbol{n}(t)$ ですから，講義の定義 6.6 の意味での線積分（その 2）は $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(t)\, dt = \int_a^b \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right| \boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \boldsymbol{n}(t)\, dt$ とも書けます．これは教科書の定義 1.43 に一致します．具体的に計算してみるとわかりますが，後者だと $\hat{\boldsymbol{n}}(t)$ を $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ で割って $\boldsymbol{n}(t)$ を求めたあと，もう一度 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|$ をかけることになって二度手間なので，講義では前者を採用しました．

## 幾何入門 レポート問題 6（2018 年 5 月 25 日）

担当：境 圭一

$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 - x^2\}$ とおく．$\partial\Omega$ を表す区分的に正則な周期的パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，$\Omega$ の境界の向きを表すもの一つ求めよ．この $\boldsymbol{l}$ を用いて，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} dl$ を計算せよ．

（6/1 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html