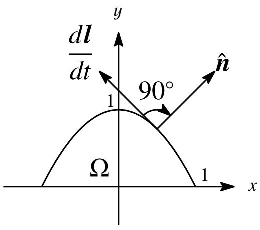
幾何入門 レポート 6（2018 年 5 月 25 日）コメント

担当：境 圭一

$\partial\Omega$ の向きが「反時計回り」になることをきちんと説明できるか，がこの問題で最も大事にしてほしいところです．例えば下のような絵を描けば，きちんと定義に従って向きを決定できている，ということが伝わります．



同じ曲線でも，どの領域の境界と見るかによって入れるべき向きは変わりますから，このステップは疎かにすべきではありません．多くの人は調べた様子が（答案上は）見られず，実際に向きを逆にしてしまった人も少なからずいました．

$\partial\Omega$ を表すパラメータとしては，例えば $-1 \le t \le 3$ において

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{cases} (t, 0) & -1 \le t \le 1 \\ (2-t,\ 1-(2-t)^2) & 1 \le t \le 3 \end{cases} \tag{1}$$

とおけば，この $\boldsymbol{l}\colon [-1,3] \to \mathbb{R}^2$ は向きも込めて $\partial\Omega$ を表しますが，要求されているのは周期的な $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ですから，周期 4 になるように (1) の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張する必要があります．このことをきちんとやっている人は多くありませんでした．一番簡単な方法としては

$$\boldsymbol{l}(t) = \boldsymbol{l}(t-4) \text{ が成り立つように } \boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ に拡張する}$$

と書けば十分でしょう．具体的に書くなら，$n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\boldsymbol{l}(t) := \begin{cases} (t-4n, 0) & 4n-1 \le t \le 4n+1 \\ (2-(t-4n),\ 1-(2-(t-4n))^2) & 4n+1 \le t \le 4n+3 \end{cases} \tag{2}$$

とおけば，(2) が求めるパラメータの一つです．(1) を $4n$ だけずらしたわけです．

よくある間違いは

（誤り）(1) は周期 4 だから，$n \in \mathbb{Z}$ に対し (2) のようになる

といった類の答案です．(1) が周期 4 なのではなく，周期 4 になるよう拡張した結果が (2) です．

例えば (2) のようなパラメータについて，その法線ベクトルは

$$\hat{\boldsymbol{n}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{cases} (0, -1) & 4n-1 < t < 4n+1 \\ (-2(t-4n-2), -1) & 4n+1 < t < 4n+3 \end{cases}$$

です．t の範囲に注意してください．2 点 $(\pm 1, 0)$ では接ベクトルや法ベクトルは定義されません．これを使えば線積分は定義通りに容易に計算されるでしょう．Gauss の発散定理を学んだあとであれば，より簡単に計算できます．

向きをきちんと調べること，パラメータを周期的かつ区分的正則に取ること，の両方ができて正解としました．少数ですが，しっかりできている人もいます．