幾何入門 演習問題 7（2018 年 6 月 1 日）

担当：境 圭一

特に断らなければ領域や曲線はすべて $\mathbb{R}^2$ 内のものとし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．

1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W} \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ と C^∞ 級関数 $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}, f\boldsymbol{V} \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}), (f\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{u})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})$ で定義する．次の等式が成り立つことを示せ．
   (1) $\mathrm{div}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{div}\boldsymbol{W}$,　$\mathrm{rot}(a\boldsymbol{V} + b\boldsymbol{W}) = a\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V} + b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ （ただし $a, b \in \mathbb{R}$ は定数）
   (2) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$,　$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \widetilde{\boldsymbol{V}} + f\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$,　ただし $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ とするとき，$\widetilde{\boldsymbol{V}} := \begin{pmatrix} V_2 \\ -V_1 \end{pmatrix}$
   (3) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ （注：このことから「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0 \implies \boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたす f は存在しない $\cdots (*)$」がわかる）
   (4) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ （注：$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$ を **Laplace 方程式**，その解 f を**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ）

2. (1) 領域 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ を考える．$\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{l} \colon [0, 2\pi] \to \Omega$ を $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ で定義する．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算することにより，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ．（問題 1. (3) $(*)$ の逆の反例になっている）

3. (1) $\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 < 1\}$ とおく．$\partial\Omega$ の向きを表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{l} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求めよ．
   (2) $\boldsymbol{V}$ を問題 2 のベクトル場とする．$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ の計算を試みよ．
   (3) $0 < \epsilon < 2$ とする．$M := \{\boldsymbol{u} \in \Omega \mid |\boldsymbol{u}| = \epsilon\}$ とし，$\partial\Omega$ と M で囲まれた有界領域を Ω' とおく．Ω' の境界としての M の向きを表す周期的正則パラメータ $\boldsymbol{m} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を一つ求めよ．
   (4) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m}$ を求めよ．Green の公式を使って $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．

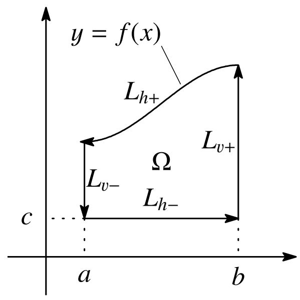
4. 曲線の正則パラメータ $\boldsymbol{l}$ に対し，$\boldsymbol{u}(t) := \left|\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right|^{-2} \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t), \boldsymbol{v}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)$ とおく．
   (1) 各 t に対し，$\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ は一次独立であることを示せ．（ヒント：$a\boldsymbol{u}(t) + b\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{0}$ と仮定し，両辺と $\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)$ の内積を取る．$\boldsymbol{u}(t) \perp \boldsymbol{v}(t)$ を使う）
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) = \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)\right)\boldsymbol{u}(t) + \left(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(t)\right)\boldsymbol{v}(t)$ を示せ．従って，線積分（その 1・その 2）とは，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t))$ を接線方向 $\boldsymbol{u}(t)$, 法線方向 $\boldsymbol{v}(t)$ の和に分解したときの各成分の係数の積分である．

5.（教科書 p. 51 参照：「関数論」で当該箇所を学んだ後に考えてみてください）
   $z \in \mathbb{C}$ と関数 $h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を実部と虚部に分け，$z = x + \sqrt{-1}\,y, h(z) = f(x, y) + \sqrt{-1}\,g(x, y)$ と書く．
   (1) $\boldsymbol{V} := \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}, \boldsymbol{W} := \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ とおくとき，「h が正則関数 $\iff \mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$」を示せ．
   (2) 曲線 $\boldsymbol{l} \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} h(z)\,dz = \int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \sqrt{-1}\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{l}$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足 1. 講義で述べたように，Gauss の発散定理は，ベクトル場に対する微分積分学の基本定理の類似とみなすことができます．本質的に同じ定理である Green の公式も同様です．この意味で，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ や $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}$, 線積分（その 1・その 2）は，ベクトル場の「微分・積分」として正当なものと言えます．演習問題 5 の補足も参照してください．
今回の問題 2 で，問題 1. (4) の $(*)$ の逆が成り立たない，ということを見ました．問題 2 ではベクトル場の分母が 0 になるのを避けるため，領域として $\mathbb{R}^2$ から $\boldsymbol{0}$ を取り除いたものを考えました．実は，このように領域に「穴を空けた」ことが，$(*)$ の逆が成り立たなかった原因です．実は「穴が空いていない」領域（**単連結領域**とよぶ）においては $(*)$ の逆が成立します．これらの事実は，線積分により領域の幾何学的な特徴（ここでは「穴の有無」のこと）を抽出できることを示します．詳細はこの講義の最終回で述べる予定です．

補足 2. 講義で述べたように，Gauss の発散定理



$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \sum_{i=1}^{k}\int_{l_i}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l}_i \qquad (*)$$

の証明は，Ω が右図のような $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le f(x)\}$ の形である場合（このとき $k = 1$）に示されれば十分で，この場合は直接計算することにより示されます．以下にその概要をまとめます．詳細は演習問題とします．

以下 $\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のように略記することにします．まず $(*)$ の左辺を考えます．

問題 1. $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\,dxdy = \underbrace{\int_{x=a}^{b}\Big(\int_{y=c}^{f(x)}(\partial_x V_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}dy\Big)dx}_{(1)} + \int_a^b\Big(\underbrace{V_2\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}}_{(2)}\underbrace{-V_2\begin{pmatrix}x\\c\end{pmatrix}}_{(3)}\Big)dx$ であることを示せ．

(1) の部分を考えます．まず

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_c^{f(x)}V_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}dy &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big(\int_c^{f(x+\epsilon)}V_1\begin{pmatrix}x+\epsilon\\y\end{pmatrix}dy - \int_c^{f(x)}V_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}dy\Big)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_{f(x)}^{f(x+\epsilon)}V_1\begin{pmatrix}x+\epsilon\\y\end{pmatrix}dy}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_c^{f(x)}\Big(V_1\begin{pmatrix}x+\epsilon\\y\end{pmatrix} - V_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Big)dy}_{(b)}\Big)\end{aligned}$$

に注意します．

問題 2. (i) (a) $\xrightarrow{\epsilon\to 0} f'(x)V_1\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ を示せ．（ヒント：$g(s) := \displaystyle\int_{f(x)}^{f(x+s)}V_1\begin{pmatrix}x+s\\y\end{pmatrix}dy$ とおくと $(a) = g'(0)$. $g'(s)$ を計算するには，V_1 の y に関する原始関数を使うとよい）

(ii) (b) $\displaystyle\xrightarrow{\epsilon\to 0}\int_c^{f(x)}(\partial_x V_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}dy$ を使って，$(1) = \Big(\underbrace{\int_c^{f(b)}V_1\begin{pmatrix}b\\y\end{pmatrix}dy}_{(1-1)}\underbrace{-\int_c^{f(a)}V_1\begin{pmatrix}a\\y\end{pmatrix}dy}_{(1-2)}\Big)\underbrace{-\int_a^b f'(x)V_1\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}dx}_{(1-3)}$ を示せ．

次に $(*)$ の右辺を考えます．$\partial\Omega$ の 4 辺に右上図のような名前をつければ $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{l} = \int_{L_{v-}} + \int_{L_{h-}} + \int_{L_{v+}} + \int_{L_{h+}}$ です．本来は $\partial\Omega$ を一つの周期的パラメータで表すべきところですが，線積分を計算するには結局 4 辺それぞれに分割して計算しますから，個別にパラメータを与えて計算すれば十分です．

問題 3. $\partial\Omega$ の 4 辺を次のようにパラメータづけする：

- L_{v-} : $\boldsymbol{l}(t) = (a, -t)$ $(c \le -t \le f(a))$
- L_{h-} : $\boldsymbol{l}(t) = (t, c)$ $(a \le t \le b)$
- L_{v+} : $\boldsymbol{l}(t) = (b, t)$ $(c \le t \le f(b))$
- L_{h+} : $\boldsymbol{l}(t) = (-t, f(-t))$ $(a \le -t \le b)$

これらを用いて

$$\int_{L_{v-}} = \text{(1-2)},\quad \int_{L_{h-}} = (3),\quad \int_{L_{v+}} = \text{(1-1)},\quad \int_{L_{h+}} = \text{(1-3)} + (2)$$

を示せ．

幾何入門 レポート問題 7（**2018** 年 **6** 月 **1** 日）

担当：境 圭一

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) := |x+y| + |x-y| - 2$ で定義し，$\Omega := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\boldsymbol{u}) < 0\}$ とおく．$\partial\Omega$ の向きを表すパラメータ $\boldsymbol{l}$ を取る．ベクトル場 $\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^5 + 2x^2y^3 - 3xy^2 \\ -4x^4y - xy^4 + y^3 \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_l \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．（ヒント：Gauss の発散定理を使う）

締切：**6/7**（木）**13:00**（研究室 (A403) で受け付けます）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html