

※今回からスペースの都合でベクトルを横に書きますが、もちろん縦でも構いません。

1. (1) $S^2 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$ とし, $V_{\pm} \subset S^2$ を

$$V_+ := \{(x, y, z) \in S^2 \mid -1 < z\}, \quad V_- := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 1\}.$$

で定義する. $V_+ \cup V_- = S^2$ を示せ.

- (2) $\varphi_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定義する. $\mathbf{a} = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対し, \mathbb{R}^3 の点 $(s, t, 0)$ と $(0, 0, -1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_+ と交わる点を $\varphi_+(\mathbf{a})$ と定める. $\varphi_+(\mathbf{a})$ を s, t の式で表し, すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\varphi_+(\mathbf{a}) \in V_+$ であることを示せ. 従って $\varphi_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_+$ とみなせる.
- (3) $\varphi_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_+$ は全単射であることを, 逆写像 $\varphi_+^{-1} : V_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ を構成することにより示せ. また, Jacobi 行列 $D\varphi_+ = \begin{pmatrix} \partial_s \varphi_+ & \partial_t \varphi_+ \end{pmatrix}$ の階数は, 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ において 2 であることを示せ. これにより, φ_+ は V_+ の各点の近くでの S^2 の局所座標になることがわかる.
- (4) $\mathbf{a} = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対し, \mathbb{R}^3 の点 $(s, t, 0)$ と $(0, 0, 1) \in S^2$ を結ぶ直線が V_- と交わる点を $\varphi_-(\mathbf{a})$ と定める. (2), (3) と同様にして, $\varphi_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_-$ は V_- の各点の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ. また φ_-^{-1} を具体的に求めよ.

注. この φ_{\pm} あるいは逆写像 φ_{\pm}^{-1} を立体射影 (stereographic projection) とよぶ.

2. (1) S^2 上の任意の点は $(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) の形に表せることを示せ. (ヒント: \mathbb{R}^3 の極座標)

S^2 の部分集合

$$A := \{(x, 0, z) \in S^2 \mid x \geq 0\}, \quad B := \{(x, y, 0) \in S^2 \mid x < 0\}$$

を考え, $V := S^2 - A, W := S^2 - B$ とおく.

- (2) $U := (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\}$ とおく. $\varphi : U \rightarrow V$ を $\varphi(\alpha, \beta) := (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)$ で定義すると, φ は V の各点近くでの S^2 の局所座標になることを示せ.
- (3) $\psi : U \rightarrow W$ を $\psi(\alpha, \beta) := (\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta, -\cos \alpha \cos \beta)$ で定義すると, ψ は W の各点の近くでの S^2 の局所座標になることを示せ.
3. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対し $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ (ただし $0 \leq \theta < 2\pi, r \geq 0$ とする) とおき, (r, θ, z) を円柱座標とよぶ.
- (1) 円柱座標で一意的に表せない \mathbb{R}^3 の点を全て求めよ.
- (2) 球面 S^2 を円柱座標で表せ.
- (3) 円柱座標で $r = 1$ で表される図形 A を図示せよ. また A を xyz 座標で表せ.
- (4) 円柱座標で $V := \{(1, \theta, z) \in A \mid \theta \neq 0\}$ とおく. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ を, \mathbb{R}^2 の直交座標 (s, t) と \mathbb{R}^3 の円柱座標を使って $\varphi(s, t) := (1, \pi + 2 \tan^{-1} s, t)$ で定義するとき, φ は V の各点の近くでの A の局所座標になることを示せ.
4. (1) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ とおく. S を図示せよ. (ヒント: 問題 3 の円柱座標を使う)
- (2) $\mathbf{0} \in S$ の近くで S の局所座標を取れないことを示せ. 従って S は曲面ではない. (ヒント: C^∞ 級写像 $\varphi : U \rightarrow S$ で $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{a} \in U$ が存在するものに対し, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ または $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ であることを示す)
- (3) $S \setminus \{\mathbf{0}\}$ は曲面であることを示せ.
5. (1) $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$ とおく. S を図示せよ.
- (2) S は曲面ではないことを示せ. (ヒント: $\mathbf{0} \in S$ の近くで局所座標を取れないことを前問と同様に示す)
6. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を一次独立なベクトルとすると, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ であることを示せ. また $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ は \mathbb{R}^3 の基底をなすことを示せ. (第 1 回目にやりましたが, 次回以降使うので再掲しました)

(提出の必要はありません)

補足：曲面の局所座標について。

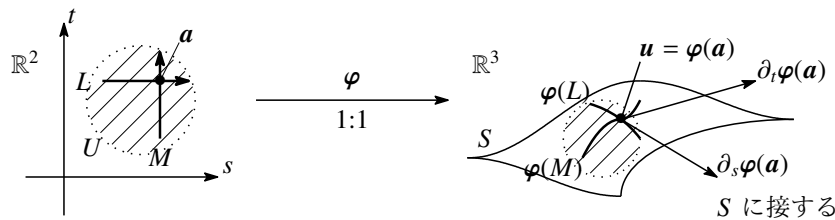
曲面の定義，すなわち，任意の $u \in S$ のまわりで取れる局所座標 $\varphi: U \rightarrow S$ の意味はわかりにくいと思います。曲線の場合の正則パラメータに対応するものと考えればよいのですが，いろいろ言い換えるうちに意味がつかめてくる，ということもあると思うので，少し補足してみます。

$u \in S$ とします。 S が曲面であることから， u のまわりの局所座標が取れます。その定義に出てくる ϵ と $\varphi: U \rightarrow S$ の性質 (i), (ii) は次のようなことを意味します（あくまで気分であり，数学的に厳密ではありません）：

- (i) $\varphi(U) \subset S$ であり， S 上で u に近い点は全て $\varphi(U)$ に含まれる（二年生後期の「位相空間論」では「 $\varphi(U)$ は S における u の近傍である」という言い方をします）
- (ii) $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ とみると φ は全単射で，従って U と $\varphi(U)$ は「同一視」される（正確には φ と逆写像の連続性も込めた同一視で，位相空間論では「 U と $\varphi(U)$ は同相」といいます）

(i), (ii) より， $\varphi(a) = u$ となる $a \in U$ が唯一つ存在します。 $U \subset \mathbb{R}^2$ ですから， $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のように， a の位置は2つの実数の組（座標）により確定します。 (ii) より U と $\varphi(U)$ は同一視されるので， u の $\varphi(U)$ 上での位置も，2つの実数の組 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます。同じように， S 上で u に近い点 $v (\in \varphi(U))$ に対しても， $\varphi(b) = v$ となる $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in U$ が唯一つ存在し， v の $\varphi(U)$ 上の位置は座標 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で確定していると言えます。このように， S が曲面であるとき，任意の $u \in S$ の近くで，平面と同じような「座標」が φ を通して定まることになります。

正則曲線のパラメータ l の場合だと，曲線上の点 $u = l(t)$ の位置が l を通して「座標」 $t \in \mathbb{R}$ で確定しました。曲線の場合は1つのパラメータ l で曲線全体を表せたのに対し，曲面の場合は S 全体を1つの「座標」で表すのは一般には無理です。1つの座標が表せるのは，考えている点 u を含む S の（十分小さい）部分集合のみです。



上の a を通る， U 上の二つの直線

$$L := \{(x, a_2) \in U\}, \quad M := \{(a_1, y) \in U\}$$

を考えます。 L, M はそれぞれ x 軸， y 軸に平行な直線です。 φ により， L, M は $\varphi(U) (\subset S)$ 上の曲線 $\varphi(L), \varphi(M)$ にうつされます。これらは曲がってはいますが（ S が曲がっているから），もとの L, M は U の座標軸に平行で， U は $\varphi(U)$ と同一視されるのでしたから， $\varphi(L), \varphi(M)$ も「座標軸」のようになっているものと期待されます。局所座標の条件 (iii) はこのことに関係します：

簡単のため $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおき，曲線 L, M のパラメータ l, m を $l(0) = m(0) = a$ となるよう選んでおきます：

$$l(u) := a + ue_1, \quad m(u) := a + ue_2.$$

このとき

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\varphi(a + \epsilon e_1) - \varphi(a)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((\varphi \circ l)(\epsilon) - (\varphi \circ l)(0)) = \frac{d(\varphi \circ l)}{du}(0),$$

つまり $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(a)$ は S 内の曲線 $\varphi \circ l$ の（つまり， $\varphi(L)$ の） u における接ベクトルであることがわかります。 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(a)$ も同様に， u における $\varphi(M)$ の接ベクトルです。局所座標の条件 (iii) より，これらは一次独立です。これは， $\varphi(L)$ と $\varphi(M)$ の接ベクトルが u において平行にはなっていないこと，つまり「座標軸」 $\varphi(L), \varphi(M)$ が接したりせず，「横断的に」交わることを意味します（直交はしていないかもしれませんが）。もし $\varphi(L)$ と $\varphi(M)$ が u において接していると， $\varphi(U)$ 上の「座標軸」だと言うのは無理がありますが，条件 (iii) により，その心配はないことになります。

幾何入門レポート問題 8 (2018 年 6 月 15 日)

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁の数を 3 で割った余りを k とおく．例えば 17S1067X なら $k = 1$, 17S1089Y なら $k = 2$.

6/15 の演習問題 1. (4) の $\varphi_-: \mathbb{R}^2 \rightarrow V_-$ を考える． V_- の部分集合 $U_0 := \{(x, y, z) \in V_- \mid 0 < z < 1\}$,

$U_1 := \{(x, y, z) \in V_- \mid -1/2 < z < 1/2\}$, $U_2 := \{(x, y, z) \in V_- \mid z < 0\}$ について, $\varphi_-^{-1}(U_k) \subset \mathbb{R}^2$ を図示せよ.

(6/22 の 3 限開始時まで提出してください)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html