幾何入門 レポート **8**（**2018** 年 **6** 月 **15** 日）コメント

担当：境 圭一

6/15 の演習では φ_+ と φ_+^{-1} を計算しました．同様にやると

$$\varphi_-(s,t) = \frac{1}{s^2+t^2+1}\begin{pmatrix} 2s \\ 2t \\ s^2+t^2-1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_-^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

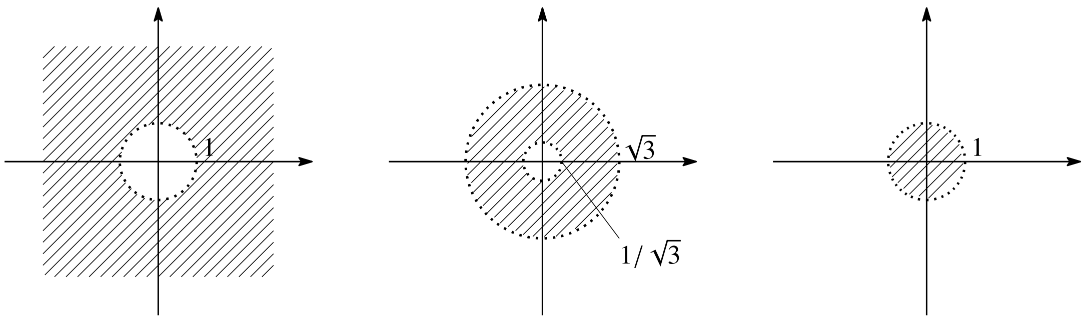
です．よって $(s,t) \in \varphi_-^{-1}(U_0)$ とすると，$\varphi_-(s,t) \in U_0$ であることから

$$0 < \frac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1} < 1, \quad \text{つまり} \quad 1 < s^2+t^2 \tag{$*$}$$

です．2 つの不等号のうち右のものは自明であることに注意してください．同じように

$$(s,t) \in U_1 \implies \frac{1}{3} < s^2+t^2 < 3, \quad (s,t) \in U_2 \implies s^2+t^2 < 1$$

です．図示すると次のようになります：



$\varphi_-^{-1}(U_0)$ $\varphi_-^{-1}(U_1)$ $\varphi_-^{-1}(U_2)$

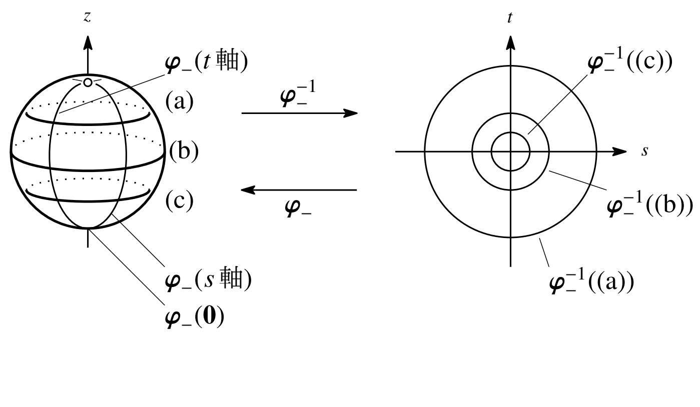
例えば $k=2$ について，$\varphi_-^{-1}(x,y,z) = \dfrac{1}{1-z}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\dfrac{1}{1-z} < 1$ より $\left|\varphi_-^{-1}(x,y,z)\right| < 1$, という答案が目立ったのですが，これは不十分でしょう．$0 < \dfrac{1}{1-z} < 1$ と $|(x,y)| < 1$ をかけて $\left|\varphi_-^{-1}(x,y,z)\right| < 1$, ということだと思いますが，$z$ と (x,y) は独立には変化できませんから，これでは十分な評価になっていません．もっとよく考えれば，例えば $\left|\varphi_-^{-1}(x,y,z)\right| < 1/2$ のように，より厳しい評価が得られてしまうかもしれません．

φ_- の求め方について，演習のときにやった φ_+ の計算と同様にすると，例えば

$$\varphi_-(s,t) - (0,0,1) = l((s,t,0) - (0,0,1))$$

となる $l \in \mathbb{R}$ が存在します．$\left|\varphi_-(s,t)\right| = 1$ であることから l を求めればよいわけですが，このとき $l = 0$ という答も出てきます．しかし $l = 0$ は $\varphi_-(s,t) = (0,0,1)$ を意味し，$\varphi_-(s,t) \in V_-$ をみたさないので，もう 1 つ出てくる答を採用するしかありません．また上の $(*)$ のところで $s^2+t^2+1 > 0$ であることを使っています（分母を払っても不等号の向きが変わらない）．こういったことはいちいち言及しておいたほうがいいでしょう．

同様にして，S^2 を平面 $z = k$ で切った切り口を φ_-^{-1} でうつしていくことにより，$\varphi_-^{\pm 1}$ による V_- と $\mathbb{R}^2$ の対応はだいたい次の図のようになります：



S^2 から $(0,0,1)$ を取り除いて穴をあけ，そこからミカンの皮をむくように V_+ を $\mathbb{R}^2$ に広げているわけですが，イメージをつかめるでしょうか．わかりにくい場合は，次元を 1 つ落とし，次のような問題を考えてみるとよいかもしれません：

$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $W_- := \{(x,y) \in S^1 \mid y < 1\}$ とする．$t \in \mathbb{R}$ に対し，$(t,0) \in \mathbb{R}^2$ と $(0,1)$ を結ぶ直線と W_- の交点を $\boldsymbol{\varphi}_-(t)$ とおく．$\boldsymbol{\varphi}_- : \mathbb{R}^1 \to W_-$ となっていることを示し，$\boldsymbol{\varphi}_-(t)$ を t の式で表せ．また

$$U_0 := \{(x,y) \in S^1 \mid 0 < y < 1\}, \quad U_1 := \{(x,y) \in S^1 \mid -1/2 < y < 1/2\}, \quad U_2 := \{(x,y) \in S^1 \mid y < 0\}$$

とおくとき，$\boldsymbol{\varphi}_-(U_k) \subset \mathbb{R}^1$ を求めよ．