

1. 次の 3 変数  $C^\infty$  級関数  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  を全て求めよ.  $S_f := f^{-1}(0)$  とおくと,  $S_f \neq \emptyset$ , かつ  $S_f$  上で  $\text{grad}(f) \neq \mathbf{0}$  となるような (従って,  $S_f$  が曲面を表すような) 定数  $k$  の範囲を求めよ. そのときの  $S_f$  を図示せよ. また, それ以外の  $k$  に対しては,  $S_f$  はどのような図形になるか?

$$(1) f(x, y, z) := x^2 + y^2 - k \quad (2) f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - k \quad (\text{ただし } a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ は } k \text{ と無関係な定数})$$

$$(3) f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + k)^2 - 16(x^2 + y^2) \quad (4) f(x, y, z) := xy + kz$$

$$(5) f(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4zx + 1 \quad (6) f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - k)^2$$

2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^\infty$  級関数とし,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  とする.  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{v}| = 1$  に対し,  $\mathbf{u}$  における  $f$  の  $\mathbf{v}$  方向の方向微分を

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - f(\mathbf{u})}{\epsilon} \quad \dots \quad (*)$$

で定義する. 講義の補題 2.5 を参考に, (\*) は  $\mathbf{v} = \text{grad}(f)(\mathbf{u}) / |\text{grad}(f)(\mathbf{u})|$  のとき最大値  $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(f)(\mathbf{u})$  を取ることを示せ. 一般に,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  について同様のことを考察せよ.

3. 円柱座標  $(r, \theta, z)$  のもとで  $T := \{(r, \theta, z) \mid (r-2)^2 + z^2 = 1\}$  と表されるトーラスを考える.  $S^1 := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{u}| = 1\}$  上の点  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  を  $[\alpha]$  で表すことにする (従って,  $S^1$  の点としては  $[\alpha + 2\pi] = [\alpha]$  である).  $F: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$F([\alpha], [\beta]) := (2 + \cos \alpha, \beta, \sin \alpha) \quad (\text{右辺は円柱座標})$$

で定義すると  $F(S^1 \times S^1) = T$  であり,  $F: S^1 \times S^1 \rightarrow T$  とみると  $F$  は全単射であることを示せ.

4.  $I := [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  とおく.  $F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  を,  $\mathbb{R}^3$  の円柱座標  $(r, \theta, z)$  のもとで

$$F(s, t) := (2 + (2s - 1) \cos \pi t, 2\pi t, (2s - 1) \sin \pi t)$$

で定義する.  $F$  の像  $M := F(I \times I)$  はメビウスの帯 (Möbius band) であることを,  $M$  を図示して確かめよ.

5.  $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qyz + 2rzx$  (ただし  $a, b, c, p, q, r$  は定数で, 少なくとも一つは 0 でない) の形の関数を二次形式 (quadratic form) という.  $S := f^{-1}(1) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 1\}$  が  $\emptyset$  でない曲面を表すための条件を求めよ. (ヒント:  $A := \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$  とおくと  $A$  は対称行列で,  $f(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  である.  $A$  は直交行列で対角化できる. 答は  $A$  の固有値を使って表現できる)

6.  $S \subset \mathbb{R}^3$  を曲面とし,  $\varphi: U \rightarrow S$  を  $\mathbf{u}_0 \in S$  の近くの局所座標とする.

(1)  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $V \subset U$  で  $\mathbf{u}_0 \in \varphi(V)$  となるものに対し, (必要なら  $\epsilon > 0$  を小さく取り直せば)  $\varphi|_V: V \rightarrow S$  も  $p$  の近くの局所座標になることを示せ.

(2) 開集合  $W \subset \mathbb{R}^2$  と,  $C^\infty$  級の全単射  $\psi: W \rightarrow U$  で Jacobi 行列が  $W$  の各点で正則であるものが存在すると仮定する.  $\varphi \circ \psi: W \rightarrow S$  も  $\mathbf{u}_0$  の近くの局所座標になることを示せ.

(3)  $D^\circ := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{u}| < 1\}$  とおく. 曲面の定義における局所座標として, いつでも  $D^\circ \rightarrow S$  の形のものを取れることを示せ. (ヒント: 開集合  $U$  に含まれる点は全て内点であることに注意し (1), (2) を使う)

(4) 曲面の定義における局所座標として, いつでも  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$  の形のものを取れることを示せ. (ヒント: (2) のような  $\psi$  を  $U = D^\circ$  と  $W = \mathbb{R}^2$  に対し構成し (3) を使う)

(提出の必要はありません)

補足. 講義の定理 7.7 は, 曲線の場合の系 4.10 の曲面版です. この定理の逆は成り立ちません. つまり,  $\text{grad}(f)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{u} \in S_f$  があったとしても,  $S_f$  が曲面か否かは, 別途調べてみないとわかりません. 今回の問題 1. (6) はその例で, 実は  $S_f$  上いたるところ  $\text{grad}(f) = \mathbf{0}$  ですが,  $k > 0$  なら  $S_f$  は曲面です. この定理を使う場合, まず  $S_f \neq \emptyset$  を示すべきです. 先に  $S_f$  上の  $\text{grad}(f)$  の様子を調べても, もし  $S_f = \emptyset$  だとしたらムダになってしまいます.

抽象的な理論も大切ですが, 具体的な曲面 (球面, トーラス, 双曲面, ...) を大事にしてください. 具体例を扱うと実際に幾何をやっている気分になりますし, 抽象的理論に本当に意味があることの確認にもなります.

幾何入門 レポート問題 9 (2018 年 6 月 22 日)

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下一桁の数を 3 で割った余りを  $a$  とおく．例えば 17S1078P なら  $a = 2$ , 17S1089Q なら  $a = 0$ .

$f(x, y, z) := x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 2(a+1)x + 4(a-4)y - 12z$  とする． $S_f := f^{-1}(0)$  は曲面となるか，理由とともに述べよ．

(ヒント：  $f(x, y, z) = 0$  となる  $(x, y, z)$  が一組でも見つければ  $S_f \neq \emptyset$  がわかる)

(6/29 の 3 限開始時まで提出してください)

[http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18\\_geometry/18\\_geometry.html](http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html)