幾何入門 レポート 9（2018 年 6 月 22 日）コメント

担当：境 圭一

$f(\mathbf{0}) = 0$ ですから $\mathbf{0} \in S_f$, よって $S_f \neq \emptyset$ です．もちろん $\mathbf{0}$ 以外の点を使っても構いません．
$\mathrm{grad}(f) = 2(x-(a+1), -2(y-(a-4)), 3(z-2))$ ですから，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ は $(a+1, a-4, 2)$ のみです．しかし $f(a+1, a-4, 2) = a^2 - 18a + 19$ は $a = 0, 1, 2$ に対しては 0 になりませんから $(a+1, a-4, 2) \notin S_f$ です．従って S_f 上に $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ はありませんから，S_f は $a = 0, 1, 2$ いずれに対しても曲面です．

$f(x,y,z) = (x-(a+1))^2 - 2(y-(a-4))^2 + 3(z-2)^2 + a^2 - 18a + 19$ です．よって $g(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + a^2 - 18a + 19$ とおくと，S_f は S_g を $(a+1, a-4, 2)$ だけ平行移動して得られる曲面であることがわかります．さらに $(X, Y, Z) = (x, \sqrt{2}\,y, \sqrt{3}\,z)$ と座標変換（拡大・縮小）すると，S_g は $X^2 - Y^2 + Z^2 = -a^2 + 18a - 19$ で表される双曲面であることもわかります．$a = 0, 1$ のときは右辺が負なので二葉双曲面，$a = 2$ のときは右辺が正なので一葉双曲面です．

やることは大体決まっているので，細かい計算や議論の進め方など，厳しめに見ています．やることが決まっていると言っても，漫然と書いていてはいけません．自分が書いていることがきちんと筋が通っているか，いつも気をつけておく必要があります．「S_f 上では曲面」などと書いた人は，何も考えずに書いていると思われても仕方ありません．そもそも a を間違えている人は問題文を読んでいないのでしょう．下 2 桁を 3 で割った人は反省してください．

目についた不適切な記述をいくつかあげておきます．

- （誤り）$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ とすると $\boldsymbol{u} = \cdots$ だが $f(\cdots) \neq 0$. よって $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$.
  → $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ を求めているのだから，おかしいと思うべきです．正しくは「S_f 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \mathbf{0}$」です．
- （不適切）$\boldsymbol{u} = (1, -4, 2)$ のとき $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$
  → 他の点について何も言っていないことになります．
- （不適切）$f(x,y,z)$ は曲面
  → 多項式は曲面ではありません．「$f(x,y,z) = 0$ は曲面を表す」なら意味が通ります．