幾何入門 演習問題 10（2018 年 6 月 29 日）

担当：境 圭一

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) := xy - z$ で定義し，$S_f := f^{-1}(0)$ とおく．
   (1) $S_f \neq \emptyset$ であることと，任意の $\boldsymbol{u} \in S_f$ に対し $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ であることを示せ．従って S_f は曲面である．
   (2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in S_f$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S_f$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S_f$ を表す方程式をそれぞれ求めよ．
   (3) $T_{\boldsymbol{u}}S_f$ を，$\boldsymbol{0} \in T_{\boldsymbol{u}}S_f$ が $\boldsymbol{u}$ に移るように平行移動して得られる平面を表す方程式を求めよ．
   (4) S_f の概形を図示せよ．
   (5) 上の (1)〜(4) と同様のことを，以下の関数について考えよ．
   (i) $f(x,y,z) := y^2 + (z-1)^2 - 2$　(ii) $f(x,y,z) := x - 2y + 3z - 4$　(iii) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 + 1$
   (iv) $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 - 1$　(v) $f(x,y,z) := \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} - 1$　(vi) $f(x,y,z) := xy + z^2 + 1$
2. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とする．$V_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ とし，$\boldsymbol{u} \in V_z^+$ の近くの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を次のように取る：$D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$,　$\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$.
   (1) $\partial_s\boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\partial_s\boldsymbol{\varphi}, \partial_t\boldsymbol{\varphi}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in V_z^+$ とする．$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を求めよ．
   (3) (1), (2) を使って，$T_{\boldsymbol{u}}S^2, T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S^2$ を表す方程式を求めよ．また，$\boldsymbol{0} \in T_{\boldsymbol{u}}S^2$ が $\boldsymbol{u}$ に移るよう $T_{\boldsymbol{u}}S^2$ を平行移動して得られる平面の方程式を求めよ．
   (4) $\boldsymbol{n}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{u} \in V_z^+$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{u}$ となる $(s,t) \in D^\circ$ を選んで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(\partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)}{|(\partial_s\boldsymbol{\varphi} \times \partial_t\boldsymbol{\varphi})(s,t)|}$ で定義する．$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S^2$ を示せ．また $\boldsymbol{\psi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を $\boldsymbol{\psi}(s,t) := (t, s, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ で定義し，$\widetilde{\boldsymbol{n}}\colon V_z^+ \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ の定義中の $\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\psi}$ で置き換えることにより定義する．$\widetilde{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と逆の向きを定める，即ち $\widetilde{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}$ が成り立つことを示せ．
3. 円柱座標 (r,θ,z) で $\{(r,\theta,z) \mid (r-2)^2 + z^2 = 1\}$ で表されるトーラスを T とおく．$\boldsymbol{\varphi}\colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の xyz 座標で $\boldsymbol{\varphi}(\alpha,\beta) := ((2+\cos\alpha)\cos\beta,\ (2+\cos\alpha)\sin\beta,\ \sin\alpha)$ で定義する．
   (1) $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset \mathrm{T}$ であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{\varphi}$ は単射であること，$D\boldsymbol{\varphi}$ は常に階数 2 であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in \boldsymbol{\varphi}(U)$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}\mathrm{T}$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}\mathrm{T}$ をそれぞれ求めよ．
   (4) $f(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^3 - 16(x^2 + y^2)$ に対し $\mathrm{T} = f^{-1}(0)$ であること（6/22 の講義，演習を参照のこと）を用いて，$\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}$ に対し $T_{\boldsymbol{u}}\mathrm{T}$ と $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}\mathrm{T}$ をそれぞれ求めよ．
4. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフは向き付け可能な曲面であることを示せ．
5. $\boldsymbol{\varphi}\colon (-1,1) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{\varphi}(t,\theta) := ((2 + t\cos(\theta/2))\cos\theta,\ (2 + t\cos(\theta/2)\sin\theta,\ t\sin(\theta/2))$ で定義し，その像を $M := \boldsymbol{\varphi}((-1,1) \times [0,2\pi])$ とおく．
   (1) M を図示し，M はメビウスの帯であることを確かめよ．
   (2) $U := (-1,1) \times (0,2\pi)$ に対し，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to M$ は単射で，$D\boldsymbol{\varphi}$ の階数は常に 2 であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(t,\theta)$ $((t,\theta) \in U)$ に対し $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(\partial_t\boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)}{|(\partial_t\boldsymbol{\varphi} \times \partial_\theta\boldsymbol{\varphi})(t,\theta)|}$ とおくと，問題 2 (4) と同様に $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) \in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}M$ である．$\displaystyle\lim_{\theta\downarrow 0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ と $\displaystyle\lim_{\theta\uparrow 2\pi}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(0,\theta))$ を比べよ．このことから M は向き付け可能ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足． 曲面 S 上の点 $\boldsymbol{u}$ における接平面 $T_{\boldsymbol{u}}S$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元部分ベクトル空間で，特に $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ を必ず通ります．気持ちとしては，$\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{u}$ にうつるような平行移動 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ により $T_{\boldsymbol{u}}S$ を平行移動して得られる平面 H（これは $\boldsymbol{u}$ を通る）を接平面とよびたいのですが，これはベクトル空間にならないという欠点があります．
パラメータ $\boldsymbol{l}$ で表される正則曲線 L の場合は，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}(t)$ を通り $\boldsymbol{w} := \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t)$ に平行な直線を $\boldsymbol{u}$ における接線とよびました．これは上の話の H に対応します．話に整合性を持たせるためには，$\boldsymbol{w}$ を基底とする 1 次元部分ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{u}}L := \langle\boldsymbol{w}\rangle = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} = k\boldsymbol{w},\ \exists k \in \mathbb{R}\}$ を「接線」とよぶほうがよかったかもしれませんが，実際に L に接しているのは前者なので，悩ましいところです．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html

幾何入門 レポート問題 10（2018 年 6 月 29 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 4 桁の数を 3 で割った余りを a とおく．例えば 17S1076α なら $a = 2$, 17S1101β なら $a = 0$.
$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ は曲面である（証明不要）．$\boldsymbol{u} = (p, q, r) \in S$ における接平面 $T_{\boldsymbol{u}}S$ が $\boldsymbol{n} := (a, 2, 3)$ と直交するとき，$\boldsymbol{u}$ を求めよ．

（7/6 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html