幾何入門 レポート **10**（**2018** 年 **6** 月 **30** 日）コメント

担当：境 圭一

問題文に f は与えられていません．$f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-1$ とおけば $S=f^{-1}(0)$ で，（たまたま）S 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ となっているので，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ を $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底に選ぶことができる，ということが何らかの形で書かれているべきです．先に $f^{-1}(0)$ が曲面であるとわかっていたとしても，$f^{-1}(0)$ 上 $\mathrm{grad}(f)\neq\mathbf{0}$ とは限りません（演習問題 9 の問題 1 (6) がその例です）．講義でやった定理 7.7 の逆は不成立です．

まず $(p,q,r)\in S$ から $p^2-q^2+r^2=1\cdots$(i) です．また $\boldsymbol{n}\in T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ と $\boldsymbol{n}\neq\mathbf{0}$, $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})\neq\mathbf{0}$ から $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{n}\cdots$(ii) をみたす $k\in\mathbb{R}$ が存在します．(ii) から $2(p,-q,r)=k(a,2,3)\cdots$(iii) で，(i) に代入すれば $k=\pm2/\sqrt{a^2+5}$ を得ます．(iii) に代入すれば (p,q,r) が求まります．

$\boldsymbol{n}$ の条件を $\boldsymbol{n}=l\cdot\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ の形に書いた場合は，「l で割る」という操作が必要になります．0 で割ってはいけないわけですから，「文字で割る」という操作については細心の注意を払い，可能ならば回避すべきです．この問題の場合，$\boldsymbol{n}\neq\mathbf{0}$ であることから $l=0$ はありえないので，l で割ることに何の問題もありません．

(7/6)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html