幾何入門 演習問題 11（2018 年 7 月 6 日）

担当：境 圭一

1. $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きを $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ で与える（例 8.10 参照）．$D^\circ := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ とおき，各 $\boldsymbol{u} \in V_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon D^\circ \to V_z^+$, $\boldsymbol{\varphi}(s,t) := (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2})$ を考える（例 7.3 参照）．
   (1) $\partial_s \boldsymbol{\varphi} := \dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}$ などと略記する．$\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}$ を計算し，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合することを示せ．つまり，任意の $\boldsymbol{a} \in D^\circ$ に対し $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ とおくと，$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u})$ となる $k > 0$ が存在することを示せ．
   (2) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x,y,z)$ に対し，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))$ を求めよ．また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)$ を求めよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(D^\circ) = V_z^+$ であることを示せ．
   (4) $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} := \int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)\, dsdt$ を計算せよ．
   (5) $\boldsymbol{\varphi}'\colon D^\circ \to V_z^+$ を，$\boldsymbol{\varphi}'(s,t) := (t, s, \sqrt{1-s^2-t^2})$ で定義する．$\boldsymbol{\varphi}'$ は $\boldsymbol{n}$ に適合しないことを示せ．
   (6) $\hat{\boldsymbol{n}}' := \partial_s \boldsymbol{\varphi}' \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}'$ とおく．$\displaystyle\int_{D^\circ} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'(s,t)\, dsdt$ を計算し (4) と比較せよ（問題 3 も参照）．
2. S^2 の向き $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ は問題 1 と同じとする．$V_+ := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > -1\}$ とおき，各 $\boldsymbol{u} \in V_+$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ として $\boldsymbol{\psi}(s,t) := \dfrac{(2s,\ 2t,\ 1-s^2-t^2)}{1+s^2+t^2}$ を考える（演習 8, 問題 1 の立体射影）．
   (1) $\boldsymbol{\psi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合することを示せ．
   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x,y,z)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\psi}(D^\circ)$ は問題 1 の V_z^+ に一致することを示せ．$\boldsymbol{\psi}\colon D^\circ \to V_z^+$ を使って $\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算し，1. (5) と比較せよ．
3. $(S, \boldsymbol{n})$ を向き付けられた曲面とする．$\boldsymbol{u} \in S$ のまわりの局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ と $\boldsymbol{\varphi}'\colon U' \to S$ で，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合し，$\boldsymbol{\varphi}'$ は $\boldsymbol{n}$ に適合せず，$\boldsymbol{\varphi}(U) = \boldsymbol{\varphi}'(U') \subset S$ をみたすものをとる．このとき $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し次を示せ：
$$\int_U \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(s,t)\, dsdt = -\int_{U'} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}'(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}'(s,t)\, dsdt$$
4. 一般に，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ と $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ に対し，$(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) \times (c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = (ad - bc)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ であることを示せ．これを使って補題 9.6 の証明を完成させよ．
5. C^∞ 級関数 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を**スカラー場**とも呼ぶ．向きづけられた曲面 S に対し，$\boldsymbol{u} \in S$ のまわりの $\boldsymbol{n}$ に適合する局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を取って，スカラー場 f の $A := \boldsymbol{\varphi}(U)$ に沿った**面積分**を次のように定義する：
$$\int_A f\, dS := \int_U f(\boldsymbol{\varphi}(s,t))\, |\hat{\boldsymbol{n}}(s,t)|\, dsdt, \quad \text{ただし} \quad \hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s \boldsymbol{\varphi} \times \partial_t \boldsymbol{\varphi}.$$
   (1) $\displaystyle\int_A f\, dS$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する局所座標 $\boldsymbol{\varphi}$ の取り方によらないことを示せ．
   (2) 定数関数 1 に対し，$\displaystyle\int_A 1\, dS$ を A の**面積**と呼ぶ．問題 2 の $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R}^2 \to V_+$ に対し，$\displaystyle\int_{V_+} 1\, dS$ を計算せよ．
6. トーラス T の局所座標として，演習 10, 問題 3 の $\boldsymbol{\varphi}\colon (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to T$ を取る．
   (1) S の向き $\boldsymbol{n}\colon T \to \mathbb{R}^3$ を，$\boldsymbol{n}$ が T で囲まれる有界領域から非有界領域に向かうよう定義する．$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合するか？（ヒント：例えば $\boldsymbol{\varphi}(\pi,\pi)$ における $\boldsymbol{n}$ の向きを見れば十分）
   (2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (y, -x, z)$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{\varphi}(U)} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (3) $\boldsymbol{\varphi}(U)$ の面積（問題 5 参照）を計算せよ．

（提出の必要はありません）

補足 1. 問題 4 は，$\boldsymbol{u} = (\partial_{s'}\boldsymbol{\varphi}')(\boldsymbol{a}')$, $\boldsymbol{v} = (\partial_{t'}\boldsymbol{\varphi}')(\boldsymbol{a}')$, $a = (\partial_s \psi_1)(\boldsymbol{a})$, $b = (\partial_s \psi_2)(\boldsymbol{a})$, $c = (\partial_t \psi_1)(\boldsymbol{a})$, $d = (\partial_t \psi_2)(\boldsymbol{a})$ とすれば補題 9.6 の状況になっています．

遅きに失した感はありますが，合成写像の（偏）微分についてまとめておきます．$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ について，$\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m$ の座標をそれぞれ $(s_1, \dots, s_l), (x_1, \dots, x_m)$ と書くとき，$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^l$ にお

ける s_k に関する偏微分は

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{\varphi})}{\partial s_k}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))\frac{\partial\varphi_i}{\partial s_k}(\boldsymbol{a}) \quad (\mathbb{R}^n\text{の元としての等式})$$

です．点 $\boldsymbol{a}$ を明示せず書けば

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{\varphi})}{\partial s_k} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\circ\boldsymbol{\varphi}\Big)\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial s_k} \quad （\text{写像 } \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n\text{としての等式}）$$

です．高校から知っていたはずの 1 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ と $g\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ の場合と比較するといいでしょう：

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \text{つまり} \quad (f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

$\dfrac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})) \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial s_k}(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}$ で，通常はスカラーのほうを先に書くと思いますが，1 変数の場合の公式と対応させるため，あえて上のような順序で書きました．

補足 2：局所座標が $\boldsymbol{n}$ に適合するか否かの判定について．

$(S, \boldsymbol{n})$ を向きづけられた曲面とし，$\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S$ を $\boldsymbol{u} \in S$ のまわりの局所座標とします．$\hat{\boldsymbol{n}} := \partial_s\boldsymbol{\varphi}\times\partial_t\boldsymbol{\varphi}\colon U \to \mathbb{R}^3$ とおくと，任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})) \quad (\in T^{\perp}_{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})}S) \tag{$*$}$$

となる $k \neq 0$ が存在します（実際には常に $|\boldsymbol{n}| = 1$ であることから $k = \pm|\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a})|$ で，これは $\boldsymbol{a}$ に依存して変化します）．$k \neq 0$ なのは，局所座標の条件 (iii) により $\partial_s\boldsymbol{\varphi}$ と $\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ が常に 1 次独立だからです．**任意の $\boldsymbol{a} \in U$ に対し $k > 0$** であるとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は **$\boldsymbol{n}$ に適合する**，といいました．$\hat{\boldsymbol{n}}$ を「$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向き」と呼ぶことにすると，元々与えられた向き $\boldsymbol{n}$ と，$\boldsymbol{\varphi}$ が決める $\boldsymbol{\varphi}(U)$ 上の向き $\hat{\boldsymbol{n}}$ が同じ方向を向くとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する，というわけです．

$\boldsymbol{\varphi}$ が $\boldsymbol{n}$ に適合するか否か調べるには，**任意の** $\boldsymbol{a} \in U$ について，$(*)$ をみたす k の符号を調べる必要があります．しかし実際には次のことが言えます：

補題． ある **1** つの $\boldsymbol{a} \in U$ について $(*)$ をみたす k が正なら，$\boldsymbol{\varphi}$ は $\boldsymbol{n}$ に適合する．

証明． $k = \pm|\hat{\boldsymbol{n}}|$ でしたが，k がどの点でも 0 にならないことと $\hat{\boldsymbol{n}}$ の連続性より，符号は U 全体で一定です（連続関数が符号を変える瞬間には必ず 0 を通る）．よって，ある $\boldsymbol{a} \in U$ について $k(\boldsymbol{a}) > 0$ なら，U 全体で $k = |\hat{\boldsymbol{n}}| > 0$ です． □

$k(\boldsymbol{a})$ の符号を調べるとき，$\boldsymbol{a}$ はどれでもよいわけですが，計算しやすいものを選ぶとよいと思います．例えば演習 11 の問題 1. (1) の場合，$\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{0})$ と $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{0}))$ を比べると簡単です．

幾何入門 レポート問題 **11**（**2018** 年 **7** 月 **6** 日）

担当：境 圭一

演習 11, 問題 1 の状況で，$\boldsymbol{W}(x, y, z) := (xz,\ yz,\ 2z^2)$ に対し，$\displaystyle\int_{V_z^+} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（7/13 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html