幾何入門 演習問題 12（2018 年 7 月 13 日）

担当：境 圭一

以下，$S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きは $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ で与える．

1. $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \left(x^2 + 3xy^2,\ -y^3 + y(2-z),\ \dfrac{z^2}{2} - 2zx\right)$ に対し，Gauss の発散定理を用いて $\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
2. （教科書の例題 2.29 参照）$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1\}$ とする．
   (1) E を図示せよ．
   (2) E が囲む有界領域を Ω とし，E の向き $\boldsymbol{n}\colon E \to \mathbb{R}^3$ を，Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与える．$\boldsymbol{n}$ を求めよ．（ヒント：補題 8.5 を使う．一般に $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$ は単位ベクトルである．符号を決めるには，例えば $\boldsymbol{n}(2,0,0) = (1,0,0)$ であるべきことに注意するとよい）
   (3) $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおき，$\mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \dfrac{(x,y,z)}{r^3}$ を考える．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．
   (4) $S^2 \subset \Omega$ であることを示せ．E と S^2 で囲まれた有界領域 Ω' に対し Gauss の発散定理を使って，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を S^2 上の面積分を使って表わせ．（S^2 の向きに注意せよ）
   (5) S^2 上 $r = 1$ であることを使って，$\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
3. $S \subset \mathbb{R}^3$ は閉曲面で，S が囲む有界領域 Ω は原点を内部に含むとする．S の向きは，Ω の内側から外側に向かう法ベクトルで与えられるとする．このとき，問題 2 のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
4. (1) C^∞ 級関数 $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対し，次の等式 (a), (b) を示せ．（演習問題 7, 問題 1 参照）
   (a) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = \Delta f$, ただし $\Delta f := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$　(b) $\mathrm{div}(g \cdot \mathrm{grad}(f)) = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g) + g\Delta f$
   (2) 講義の定理 9.15 (Gauss の発散定理) の状況で，次の **Green の公式**を示せ：$f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とするとき
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} (g \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(g)) \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (g \cdot \Delta f - f \cdot \Delta g)\, dxdydz$$
5. (1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := (x,y,z)$ に対し，Gauss の発散定理を使って $\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．
   (2) $\boldsymbol{\psi}(s,t) := \dfrac{1}{1+s^2+t^2}(2s,\ 2t,\ -1+s^2+t^2)$ で与えられる S^2 の局所座標 $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$（立体射影）が向き $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ に適合することを示せ．$\boldsymbol{\psi}(\mathbb{R}^2)$ 上での $\boldsymbol{V}$ の面積分を計算し (1) と比較せよ．S^2 上で，$\boldsymbol{\psi}(\mathbb{R}^2)$ で覆われない部分はどこか？
6. 講義の例 9.12 の計算を正当化しよう．$0 < \epsilon < 1$ に対し $U_\epsilon := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \epsilon < |\boldsymbol{u}| < 1 + \epsilon\}$ とおく．
   (1) U_ϵ を図示せよ．$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon\colon U_\epsilon \to \mathbb{R}^3$ を，$(r\cos\theta, r\sin\theta) \in U_\epsilon$ に対し
$$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(r\cos\theta, r\sin\theta) := (\cos(1-r)\cos\theta,\ \cos(1-r)\sin\theta,\ \sin(1-r))$$
   で定める．$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon$ は向きを保つ S^2 の局所座標で，$\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)$ は「赤道」$\{(x,y,0) \in S^2\}$ を覆うことを示せ．
   (2) $\displaystyle\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} \to 0$ を示せ．“$\displaystyle\lim_{\epsilon \downarrow 0} \boldsymbol{\varphi}_\epsilon(U_\epsilon)$” はどんな集合か考えよ．

（提出の必要はありません）

補足． 曲面が曲線と異なる点は，単独の局所座標（パラメータ）で全体を覆えないことです．そのため，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算するには，講義でやった定理 9.9 のように S を複数の局所座標で覆い，それぞれの上での積分値を足し合わせます．しかし実際は例 9.12 のように「面積 0」の部分を除いて曲面を覆う局所座標を取って計算しても正しい答が得られ，しかも後者の方が簡単な場合が多いようです．その理由や，そもそも「面積 0」とはどういう意味か，ということはこの講義で扱う余裕はなく，「実解析学」で学ぶのを待ってもらうしかありませんが，「面積 0」の領域が積分の値に影響しないことは，例えば領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $z = f(x,y)$ の積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\, dxdy$ が，f のグラフと Ω で挟まれる領域の体積であったことを思い出すと，ある程度納得しやすいでしょう．「体積 = 底面積 × 高さ」ですから，底面積 0 の領域上の部分は「体積 0」で，この部分を取り除いても積分の値は変化しません．

幾何入門 レポート問題 12（2018 年 7 月 13 日）

担当：境 圭一

$S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ の向きを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{u}$ で与える．$\boldsymbol{V}(x, y, z) := (z^2 x,\ -3yz^2,\ z^3)$ に対し，$\displaystyle\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

（7/20 の 3 限開始時までに提出してください）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html