# 幾何入門 レポート 12（2018 年 7 月 13 日）コメント

担当：境 圭一

$\mathring{D}^3 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| < 1\}$ とおけば，これは $S^2$ に囲まれる有界領域です．Gauss の発散定理を使うためにチェックすべきことは

(1) 向きに関して：与えられた向きは $D^3$ の内側から外側に向かう向きです

(2) $\boldsymbol{V}$ が $D^3$ 上定義されていること：$\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されていますから，$D^3$ 上でも定義されます

これらを確認すれば，Gauss の発散定理から

$$\int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = \int_{\mathring{D}^3} \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz = \int_{\mathring{D}^3} z^2\, dxdydz$$

を得ます．もし (1) が逆向きなら右辺にマイナスが必要です．(2) がダメなら，Gauss の発散定理を（そのまま）使うことは諦めなければなりません（演習問題 12, 問題 2 参照）．これらのチェックを欠かしてはいけません．「いつもこうだから今回も大丈夫だろう」というのが事故の元です．そういった失敗を繰り返して重大な過失を招いている人たちを色々なニュースで見聞きするはずです．皆さんはそうなってはいけません．たかが積分の問題ですが，ここで気を配る習慣をつけなければ，社会へ出てから急に気を配れるようになるはずがありません[*1]．
このコメントは採点する前の段階で書いていますが，向きのことを気にしていない答案が多いようです．あえて向きを逆にして小さな事故に遭ってもらって，以降気を配るよう促す，というのが教育的配慮だったかもしれないと反省しています．きちんと向きのことを気にしている人も少なからずいましたので，採点上は差をつけることにしました．

積分自体は，3 次元の極座標（球面座標）によってもよいですし，まず $z$ を固定して $x, y$ に関して $x^2 + y^2 < 1 - z^2$ 上で積分し，そのあと $z$ について $-1 \leq z \leq 1$ の範囲で積分する，という方法でも容易です．

(7/23)



[*1] 書いていて耳が痛い