

1. (1) C^∞ 級関数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $\text{rot}(\text{grad}(f)) = \mathbf{0}$ を示せ.
 (2) \mathbb{R}^3 上の C^∞ 級ベクトル場 \mathbf{V} に対し, $\text{div}(\text{rot}\mathbf{V}) = 0$ を示せ.
2. $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ とおく.
 (1) S は境界つき曲面であることを示せ. ∂S を求めよ. (例 10.2 を参照せよ)
 (2) S の向き $\mathbf{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := \mathbf{u}$ で定める. \mathbf{n} が誘導する ∂S の向きを表すパラメータ \mathbf{l} を 1 つ求めよ.
 (3) (2) の \mathbf{l} について, \mathbb{R}^3 上のベクトル場 $\mathbf{V}(x, y, z) := (-y + z, z + x, z)$ に対し, $\int_{\mathbf{l}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ を計算せよ.
 (4) (3) の \mathbf{V} に対し $\text{rot}\mathbf{V}$ を求めよ. $\mathring{D}^2 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ と $\varphi: \mathring{D}^2 \rightarrow S, \varphi(s, t) := (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ を使って $\int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathring{D}^2} (\text{rot}\mathbf{V})(\varphi(s, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s, t) ds dt$ を計算し (3) と比較せよ. ただし $\hat{\mathbf{n}} := \partial_s \varphi \times \partial_t \varphi$ である.
3. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) := z + x^2 + y^2 - 1$ で定義し, $S := f^{-1}(0) \cap \{z \geq 0\}$ とおく.
 (1) S は境界つき曲面であることを示せ. ∂S を求めよ.
 (2) S の向き $\mathbf{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := \frac{\text{grad}(f)(\mathbf{u})}{|\text{grad}(f)(\mathbf{u})|}$ で定義する (補題 8.5 参照). \mathbf{n} が ∂S に誘導する向きを求めよ.
 (3) 前問 (3) の \mathbf{V} に対し, $\int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.
4. $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$, $\partial_\pm S := \{(x, y, \pm 1) \in S\}$ とおく. S は $\partial S = \partial_+ S \cup \partial_- S$ を境界とするような境界つき曲面であることを示せ. S の向きを $\mathbf{n}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ となるような \mathbf{n} で定めるとき, \mathbf{n} が $\partial_\pm S$ に誘導する向きは $\mathbf{l}_\pm(t) := (\cos(\mp t), \sin(\mp t), \pm 1)$ で表されることを示せ.
5. \mathbf{V} を \mathbb{R}^3 上のベクトル場とする. 向き付けられた境界つき曲面 $(S, \mathbf{n}), (S', \mathbf{n}')$ は $S \cap S' = \partial S = \partial S'$ をみたし, \mathbf{n}, \mathbf{n}' は $\partial S = \partial S'$ に逆の向きを導くとする. このとき $\int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S'} \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS' = 0$ を示せ.
6. 閉曲面 S と \mathbb{R}^3 上のベクトル場 \mathbf{V} に対し, $\int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ を示せ. (ヒント: S は境界を持たない)
7. Stokes の定理における「コンパクト」(\mathbb{R}^3 の有界閉集合であること) という条件は必要である. ここでは有界性が必要であることを確かめよう. $S := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}$ とする.
 (1) S は \mathbb{R}^3 の閉集合だが, 有界でないことを示せ.
 (2) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(s, t) := (s, t, 0)$ は, 各 $\mathbf{u} \in S$ の近くの局所座標であることを示せ. また $\partial S = \{(x, 0, 0) \in S\}$ であることを示せ.
 (3) S の向きを, $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := (0, 0, 1) (\forall \mathbf{u} \in S)$ となる法ベクトルで定める. このとき, (2) の座標は \mathbf{n} に適合することを示せ. また, $\mathbf{l}: \mathbb{R} \rightarrow \partial S, \mathbf{l}(t) := (t, 0, 0)$ は \mathbf{n} から誘導される ∂S の向きを表すことを示せ.
 (4) \mathbb{R}^3 上のベクトル場 $\mathbf{V}(x, y, z) := (e^{-x^2}, x, 0)$ に対し, $\int_{\partial S} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$ を計算せよ. “ $\int_S \text{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ ” は有限か?
8. 形式的に “ $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ” とおくととき, 次の形式的な「等式」を示せ.
 (1) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, “ $\nabla f = \text{grad}(f)$ ”
 (2) $\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, “ $\nabla \times \mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{V}$ ”
 (3) $\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, “ $\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div}\mathbf{V}$ ”
 (4) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, “ $(\nabla \cdot \nabla)f = \Delta f$ ” (演習問題 12, 問題 1 参照)
 また, (1)~(3) と今回の問題 1 を比較せよ.

(提出の必要はありません)

補足: 境界に導かれる向き (定義 10.4) について.

また向きに関してややこしい話が出てきて辟易しますが, Stokes の定理を定理 10.9 の形で成り立たせるためには, 向きのついた曲面 (S, \mathbf{n}) に対して, ∂S の向きを正しく定めないとはいけません. それが定義 10.4 の「 \mathbf{n} が ∂S に導く向き」です. 定義 10.4 と同じ内容を, 繰り返すにはなりますが, 多少の言い換えも含めてまとめておきます. 詳細は各自検討してください.

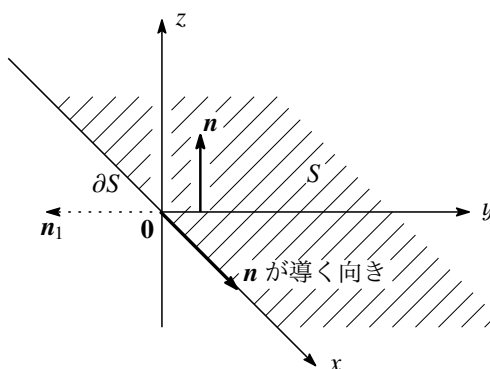
まず命題 10.5 で述べたのは次のようなことです. (S, \mathbf{n}) を向きづけられた境界つき曲面とし, $\mathbf{u} \in \partial S$ のまわりの局所座標 $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ で \mathbf{n} に適合するものを取ります. $U := W \cap \mathbb{H}^2$ とおくと $\varphi(U) \subset S$ で, $\forall \mathbf{a} \in U$ に対し

$$(\partial_s \varphi)(\mathbf{a}) \times (\partial_t \varphi)(\mathbf{a}) = k \cdot \mathbf{n}(\varphi(\mathbf{a}))$$

をみます $k > 0$ が存在します. $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{u}$ となる $\mathbf{a} \in U$ を取るとき, $\mathbf{u} \in \partial S$ であることから, $\mathbf{a} = (s_0, 0) \in \partial \mathbb{H}^2$ とおけます. 十分小さい $\epsilon > 0$ に対し, $l: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \partial S$ を $l(t) := \varphi(t + s_0, 0, 0)$ とおけば, l は \mathbf{n} が導く ∂S の向きを表します.

さらに言い換えると, \mathbf{n} が導く ∂S の向きとは, 上のような座標について $(\partial_s \varphi)(\mathbf{a})$ の方向である, とも言えます.

特別な場合として, $S := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}$ について考えましょう (下図参照). 平面 $z = 0$ を xy 平面とみなし, その中に含まれる上半平面を S としたわけです. 境界 ∂S は x 軸です. 向きを $\mathbf{n}(\mathbf{u}) := (0, 0, 1) (\forall \mathbf{u} \in S)$, つまり z 座標の正の方向と定めたとき, \mathbf{n} が ∂S に導く向きは, x 軸の正の方向です.



演習問題 13, 問題 7. (2), (3) あたりも参照してください.

より平たく, 次のようにも言えます: \mathbf{n} が指し示す向きが「上」になるように ∂S 上に立つことを想像してください. \mathbf{n} が導く向きに沿って ∂S 上を歩くと, 左手側に曲面が見えます. 右手側は曲面が途絶えています. 2次元の場合に出てきた「領域の境界としての曲線の向き」 (§6) との共通点に気づくでしょうか.

向きは数学の至るところで符号に関わる面倒な問題を引き起こすもので, しかも多くの場合は避けては通れません. 「幾何入門」の場合は, 積分の値の正負を決めるためにどうしても必要なものです.

幾何入門レポート問題 13 (2018 年 7 月 20 日)

担当：境 圭一

$S := \{\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{u}| = 1, x \geq 0\}$ は境界つき曲面である (証明不要). S の向き $\mathbf{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\mathbf{n}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ で与える. $\mathbf{V}(x, y, z) := \frac{1}{\pi}(zx^2, z(x^3 - 1), y(x^2 + 1))$ に対し, $\int_S \text{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ.

(7/27 の 3 限開始時まで提出してください)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html