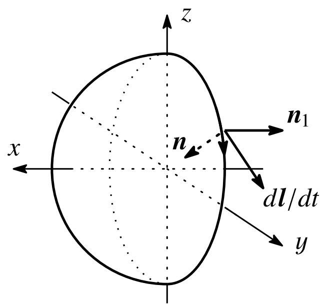
幾何入門 レポート **13**（**2018** 年 **7** 月 **20** 日）コメント

担当：境 圭一

Stokes の定理を使うと計算が容易になります．その際に最も重要なのは，$\partial S$ に導かれる向きを正しく把握できるか，という点です．この問題の場合は $\partial S=\{(0,y,z)\in S\}$ で，与えられた向き $\boldsymbol{n}$ が導く $\partial S$ の向きは，例えば

$$\boldsymbol{l}(t):=\begin{pmatrix}0\\ \cos(-t)\\ \sin(-t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$

で表されます．次のような図を描くと，境界に導かれる向きがわかっている，とわかるような答案になります．




逆にこのような考察の跡がないと，答が正しくても減点です．例えば「$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}$ だから」では，理由としては不十分でしょう．幾何学的に重要なポイントがわかることが大切で，図が綺麗である必要はありません[*1]．
Stokes の定理を使わなくても，例えば

$$\boldsymbol{\varphi}\colon \mathring{D}^2:=\{\boldsymbol{u}=(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid |\boldsymbol{u}|<1\}\to S,\quad \boldsymbol{\varphi}(s,t):=(\sqrt{1-s^2-t^2},\ s,\ t)$$

のような座標が向きを保つか検討した上で，定義通り計算することも可能です．一般的に，Stokes の定理や Gauss の発散定理などは，計算不可能なものを可能にしているわけではなく，単に簡略化しているにすぎません．

「$\partial S=\{(0,y,z)\in S\}$ とおく」のような答案は変です．$S$ はすでに与えられたものですから，$\partial S$ もすでに決まっているはずで，解答者が勝手に「…とおく」というのは許されません．「$\partial S=\{(0,y,z)\in S\}$ である」ならわかります．
また「$\boldsymbol{n}$ が $\partial S$ に導く向きを表すパラメータは $\boldsymbol{l}(t)=(0,\cos t,-\sin t)$ となる」というのも変です．パラメータの取り方は無数にあり，$\boldsymbol{l}(t)=(0,\cos t,-\sin t)$ はそのうちの一つにすぎません．「$\boldsymbol{n}$ が $\partial S$ に導く向きを表すパラメータとして $\boldsymbol{l}(t)=(0,\cos t,-\sin t)$ を取る」ならわかります．このあたりはかなり混乱している人もいるようで「正則パラメータ $\boldsymbol{n}$」などはその最たるものです．誰かの答案を何も考えず丸写しして失敗していることが一目瞭然です．
解答には必ずしも影響しないかもしれませんが，$\mathbb{R}^3$ の座標軸は $x,y,z$ の順に右手系であることに注意してください．これを逆にしている人がたくさんいます．そもそもの $\mathbb{R}^3$ の向きを間違えると，もはや向きに関して収集がつかなくなります．

(7/27)



[*1] 講義の板書を見ればわかる