幾何入門 演習問題 14（2018 年 7 月 27 日）

担当：境 圭一

※今までの復習と補足です

1. (1) 関数 $f(x,y,z) := xy+yz+zx$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x(y^2+z^2),\ y(z^2+x^2),\ z(x^2+y^2))$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})$ を計算せよ．

   (3) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{W} \neq 0$ をみたすとき，$\boldsymbol{W} = \mathrm{rot}\boldsymbol{U}$ となるような C^∞ 級ベクトル場 $\boldsymbol{U}$ は存在しないことを証明せよ．

2. $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+(y/2)^2+(z/3)^2 = 1\}$ とおく．

   (1) S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．

   (2) 各 $\boldsymbol{u} = (a,\ b,\ c) \in S$ に対し，$T_{\boldsymbol{u}}S$ を表す方程式を求めよ．また $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底を 1 つ求めよ．

   (3) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ で，$\boldsymbol{n}(1,0,0) = (-1,0,0)$ をみたすものを求めよ．

   (4) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \left(x^3+xyz-xy^2,\ y-y^2z+y^3,\ \dfrac{yz^2}{2}-3zx^2-y^2z\right)$ と $\boldsymbol{W}(x,y,z) := \dfrac{(x,\ y-1,\ z)}{(x^2+(y-1)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ に対し，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S}$ と $\displaystyle\int_S \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし S の向きは (3) のものとする．

3. $f(x,y,z) := x^2+(y-1)^2-(z+2)^2-1$ とおく．

   (1) $S := f^{-1}(0)$ とおく．S は向きづけ可能な曲面であることを示し，S の概形を図示せよ．

   (2) S を平面 $z = k$ で切った切り口は円であることを示し，その半径が最小となるような k を求めよ．

   (3) $\boldsymbol{u} = (a,b,c) \in S$ とする．$T_{\boldsymbol{u}}S$ を表す方程式を求めよ．また $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底を 1 つ求めよ．

   (4) $S' := \{(x,y,z) \in S \mid -3 \le z \le -1\}$ とおく．S' は境界つき曲面であることを示せ．$\partial S'$ を求めよ．

   (5) $\boldsymbol{n}(1,1,-2) = (1,0,0)$ となる S の向きが $\partial S'$ に導く向きを求めよ．

   (6) $\boldsymbol{V}(x,y,z) := \left((1-y)(z+2),\ x\sin(\dfrac{\pi z}{2}),\ z^2\right)$ に対し，$\displaystyle\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

4. (1) $S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2+y^2 \le 1\}$ は境界つきコンパクト曲面であることを示せ．∂S を求めよ．

   (2) S の向きを $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}(x,y,0) := (0,0,1)$ で与える．∂S を表す周期的な正則パラメータ $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to S$ で，$\boldsymbol{n}$ が導く ∂S の向きを表すものを 1 つ求めよ．

   (3) S と $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (V_1(x,y), V_2(x,y), 0)$ の形のベクトル場に対し Stokes の定理を適用し，得られた等式と 2 次元の場合の Green の公式（講義の定理 6.13）を比較せよ．

5.（やや難，教科書の §3.3 参照）$\boldsymbol{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{m}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ で定義し，$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \boldsymbol{m}(\mathbb{R})$ とおく．

   (1) 一般に，$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ に対し，$\mathrm{rot}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = (\mathrm{div}\boldsymbol{W})\boldsymbol{V} - (\mathrm{div}\boldsymbol{V})\boldsymbol{W} + (\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}(W_i))_{i=1}^3 - (\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{grad}(V_i))_{i=1}^3$ を示せ．

   (2) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t) := \dfrac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3}$ は t に依存する Ω 上のベクトル場である．$t \in \mathbb{R}$ を固定するとき，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を計算せよ．

   (3) 一般に，$t \in \mathbb{R}$ に依存するベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t) := (V_i(\boldsymbol{u};t))_{i=1}^3$ に対し，$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u};t)\,dt := \left(\int_a^b V_i(\boldsymbol{u};t)\,dt\right)_{i=1}^3$ は 3 次元ベクトル場である．Ω 上のベクトル場 $\displaystyle\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) := \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{m}(t)|^3}\times\frac{d\boldsymbol{m}}{dt}(t)\,dt$ に対し，$\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ を求めよ．

   (4) $n \in \mathbb{N}$ に対し，周期 1 の滑らかな閉曲線 $\boldsymbol{l}_n(t)$ を，$|t| \le \dfrac{1}{4}$ のとき $\boldsymbol{l}_n(t) = (0,0,4nt)$, また $\dfrac{1}{4} \le t \le \dfrac{3}{4}$ のとき $|\boldsymbol{l}_n(t)| \ge 4n$ をみたすように選ぶ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{l}_n} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_n$ を計算せよ．

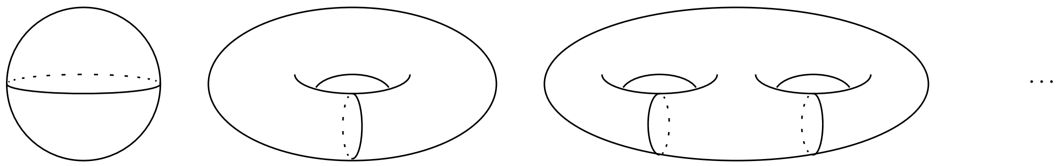
   (5) Ω は単連結ではないことを示せ．

（提出の必要はありません）

補足 1：「閉曲線が一点に縮む」ということの定義．詳細はトポロジーで学びます．ここでは概略だけ述べておきます．
一般に，曲線 $\boldsymbol{l}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の**連続変形**（ホモトピー (homotopy) という）とは，連続写像 $\boldsymbol{h}\colon [0,1]\times[a,b] \to \mathbb{R}^n$ で，任意の $t \in [a,b]$ に対し $\boldsymbol{h}(0,t) = \boldsymbol{l}(t)$ となるようなものをいいます．$\boldsymbol{h}$ が連続とは，$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ と書いたとき，各 h_k が 2 変数の連続関数であることを指します．$\boldsymbol{l}_s(t) := \boldsymbol{h}(s,t)$ とおくと，各 $s \in [0,1]$ に対し $\boldsymbol{l}_s\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ は曲線で，s を動かすと，$\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{l}$ から始まって

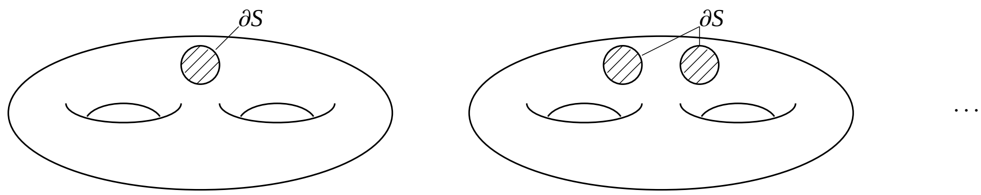
「連続的に」$\boldsymbol{l}_1$ まで変形していくわけです．
閉曲線 $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ が**連続変形で一点** $\boldsymbol{u}_0$ **に縮む**とは，連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ $(0 \le s \le 1)$ で $\boldsymbol{l}_1$ が $\boldsymbol{u}_0$ への**定値写像**となる，つまり $\boldsymbol{l}_1(t) = \boldsymbol{u}_0$ $(\forall t \in \mathbb{R}^1)$ となるものが存在することをいいます．もとの曲線 $\boldsymbol{l}$ が連続変形 $\boldsymbol{l}_s$ により変形していき，最後に 1 点 $\boldsymbol{u}_0$ に「つぶれる」様子を思い浮かべてみてください．

補足 2：向きづけ可能な（境界つき）コンパクト曲面の分類． 講義で主に扱った球面や双曲面の他にも曲面はいろいろあります．実は 19 世紀中には，曲面の分類は完了しています．ここでは向きづけ可能でコンパクトなものだけリストアップしてみます．
まず $\partial S = \emptyset$ の場合は，S は閉曲面であり，以下に図示する Σ_g $(g = 0, 1, 2, \dots)$ のいずれかになります：



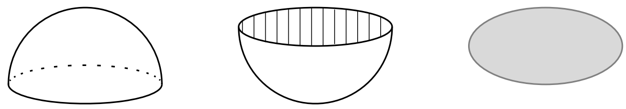
$\Sigma_0 = S^2$ $\Sigma_1 = T$ Σ_2

g は**種数** (genus) と呼ばれます．$g \ge 3$ の場合の Σ_g の絵も類推されると思います．
$\partial S \ne \emptyset$ の場合は，上の絵から「小円板」をいくつかくりぬいたものになります．例えば Σ_2 から「小円板」をくりぬいて得られる境界つき曲面は以下のいずれかになります：



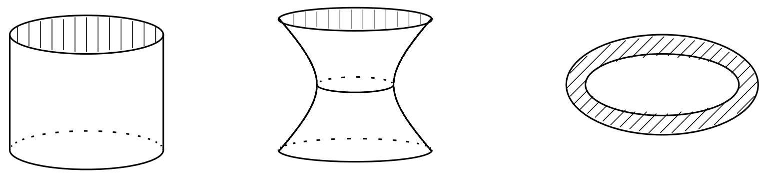
$\Sigma_{2,1}$ $\Sigma_{2,2}$

$\Sigma_{g,k}$ $(g, k \ge 0)$ の絵も類推されると思います．$\partial\Sigma_{g,k}$ は k 個の円周からなります．向きづけ可能コンパクト曲面がこのようなものに限る，というのは，例えば**ホモロジー論**の応用として得られる結果です．
「いずれかになる」ということの正確な意味は，全ての向きづけ可能コンパクト曲面 S は $\Sigma_{g,k}$ $(\exists g, k \ge 0)$ のいずれかに**同相**である，ということです．同相とは，講義の補題 9.1 の条件 (i) と，(ii) の「C^∞ 級」を「連続」に変えたものをみたす写像 $\psi\colon S \to \Sigma_{g,k}$ が存在するということです．詳しくは**位相空間論**で学びます．
同じ $\Sigma_{g,k}$ であっても，$\mathbb{R}^3$ の部分集合として実現する方法は様々です．このことを**多様体論**の言葉で表すと「各 g, k に対し，**埋め込み** $\Sigma_{g,k} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ は複数ある」となります．例えば次の絵は，$\Sigma_{0,1}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



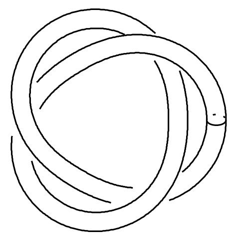
$S^2 \cap \{z \ge 0\}$ $S^2 \cap \{z \le 0\}$ $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

また次の絵は，$\Sigma_{0,2}$ を $\mathbb{R}^3$ の部分集合としていろいろな方法で実現したものです：



円柱の一部 一葉双曲面の一部 $\{(x, y, 0) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$

これらはいずれも補足 1 で述べた連続変形の意味で互いに移り合うもので，本質的に差のあるものではありませんが，例えばトーラス Σ_1 を $\mathbb{R}^3$ の部分集合として次のように実現したとき，それは通常のトーラスの絵とは本質的に異なります：



幾何入門 レポート問題 **14**（**2018** 年 **7** 月 **27** 日）

担当：境 圭一

$\boldsymbol{l}(t) := (2\cos t, \sin t, 0)$ で表される $\mathbb{R}^3$ 内の閉曲線を L とする．$\partial S = L$ となるような $\mathbb{R}^3$ 内の向きづけ可能コンパクト曲面 S は z 軸と交わることを示せ．（ヒント：講義の例 11.5 と同様だが $\boldsymbol{V}$ の取り方に工夫が必要：中間試験の問題 4 を見よ）

※ **8/2**（木）**13:00** までに研究室 (A403) のレポートボックスに提出してください．レポート 13, 14 とも，採点が終わり次第，研究室前で返却します．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_geometry/18_geometry.html