幾何入門 レポート 14（2018 年 7 月 27 日）コメント

担当：境 圭一

$\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus (z \text{ 軸})$ 上定義されるベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) := \frac{1}{x^2+4y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

について，まず直接計算により $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ がわかります．L のパラメータ $\boldsymbol{l}(t) := (2\cos t, \sin t, 0)$ を用いると

$$\int_L \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4(\cos^2 t+\sin^2 t)}\begin{pmatrix}-\sin t\\2\cos t\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}dt = \pi \tag{$*$}$$

となります．$\partial S = L$ となる向きづけ可能コンパクト曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を取り（講義で述べたように $\mathbb{R}^3$ は単連結なので，これは可能です），$S \subset \Omega$ と仮定すると，Stokes の定理と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ から

$$\int_L \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \pm\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = \pm\int_S \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = 0$$

となり，これは $(*)$ に矛盾します．よって $S \not\subset \Omega$ でなければならず，これは S が z 軸と交わることを意味します．
$\boldsymbol{V}$ を上のように取らず，例えば

$$\boldsymbol{W}(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

を使うと，$(*)$ の計算はもっと困難です．

「Ω は単連結でないから $\partial S = L$ となる S はない」というのは誤りです．$\mathbb{R}^n$ 内の単連結な領域とそうでない領域について，正しい認識は次の通りです：

(i) 単連結な領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に含まれる閉曲線 L に対しては，$\partial S = L$ となる向きづけ可能コンパクト曲面 $S \subset \Omega$ が**必ず**存在する

(ii) 単連結でない領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対しては，閉曲線 $L \subset \Omega$ で，$\partial S = L$ となる向きづけ可能コンパクト曲面 $S \subset \Omega$ が存在しないようなものが，**少なくとも 1 つ**存在する

(iii) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が単連結でない場合でも，閉曲線 $L \subset \Omega$ で，$\partial S = L$ となる向きづけ可能コンパクト曲面 $S \subset \Omega$ が存在するようなものもある
（例：$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (z \text{ 軸})$ 内の閉曲線 $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+y^2 = 1\}$ は $S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+y^2 \le 1\}$ の境界で，S は Ω 内の向きづけ可能コンパクト曲面です）

$\mathbb{R}^n$ 内の領域については「単連結であること $\iff$ (i)」という事実が知られています．単連結でないことの特徴付けとしては，(i) の「必ず〜である」の部分を否定するわけですから，(ii) のように「〜でないものが少なくとも 1 つある」という形になります．(iii) の可能性は排除されていないことに注意してください．
「Ω は単連結でないから $\partial S = L$ となる S はない」というのは，上の (ii) の「〜でないものが少なくとも 1 つ存在する」の部分を「すべてが〜でない」と混同している，あるいは (iii) の可能性を根拠なく排除してしまっている，という理由で誤りです．
この問題では Ω の単連結性を論じる必要はなく，むしろこの問題の結論により Ω が単連結でないことが従う，というほうが正確です．

実は向きづけ可能性はあまり本質的でなく，今回の問題の L と Ω に対し，$\partial S = L$ となる Ω 内のコンパクト曲面 S は（Möbius の帯のようなものも許しても）存在しません．一方でコンパクト性は本質的で，$\partial S = L$ となる Ω 内の非コンパクト曲面として

$$S := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/2)^2+y^2 \ge 1\}$$

があります．

問題文に Ω は定義されていません．講義では確かに領域を Ω という記号で表すことが多かったと思いますが，答案上はきちんと定義すべきです．また，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が Ω 上定義されることは言及しておくべきでしょう．