特に断らなければ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし，関数やベクトル場は全て C^∞ 級のものとする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．要点が押さえられていれば，必ずしも全ての計算過程を書く必要はない．

1. (1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積 V を求めよ．（答のみでよい）

   (2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{y}{x^2+4} - \dfrac{x}{y^2+4}$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} xy^2 - 2x^2 + 8x \\ x^2y + 3y^2 + 5y \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ を全て求めよ．（答のみでよい）

   (4) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2y^2 - \dfrac{2}{3}y^3$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g))$ の最大値と，最大値を与える $\boldsymbol{u}$ を全て求めよ．（答のみでよい）

   (5) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} \neq 0$ をみたすとき，$\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(h)$ となるような C^∞ 級関数 $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを証明せよ．

2. (1) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ 2xy - 3y^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 \\ 2xy + 3y^2 \end{pmatrix}$ で定義する．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}, \mathrm{div}\boldsymbol{W}, \mathrm{rot}\boldsymbol{W}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (2) 関数 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ をみたすものは存在するか？存在するならば f を一つ与え，存在しないならばそのことを証明せよ．

   (3) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{l} \colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

   (4) 関数 $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で $\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(g)$ をみたすものは存在するか？存在するならば g を一つ与え，存在しないならばそのことを証明せよ．

   (5) 曲線のパラメータ $\boldsymbol{m} \colon [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{m}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m}$ を計算せよ．

3. (1) $\Omega := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 < y < \sqrt{1 - x^2} \right\}$ とおく．$\partial\Omega$ を表す区分的に正則なパラメータ $\boldsymbol{l} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，周期的かつ Ω の境界の向きを表すものを一つ与えよ．（答のみでよい）

   (2) (1) で与えた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{(\sin x + \cos y + 3)^2} \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin y \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．ただし (1) で与えた $\boldsymbol{l}$ の周期を T とするとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ の積分区間は $[0, T]$ である．

   (3) (1) で与えた $\boldsymbol{l}$ と，ベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} x^7 - x^6y - x^4y^3 - 4x^3y^4 + 3x^2y^5 + xy^6 \\ -6x^6y + 3x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + 3x^2y^5 - xy^6 \end{pmatrix}$ に対し，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dl$ を計算せよ．積分区間については (2) と同様である．

4. (1) $\mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{x^2 + 4y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ で定義する．$\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (2) $\boldsymbol{l} \colon [0, 2] \to \mathbb{R}^2 - \{\boldsymbol{0}\}$ を $\boldsymbol{l}(t) := (2 - |t - 1|) \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$ で定義する．$\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b), 0 < a < b < 2$ となる a, b を求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を求めよ．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 \times 3 = 12$,　**4**: $2 + 2 + 4 = 8$)