# 幾何入門 中間試験（2018 年 6 月 8 日）解答例

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書く場合があります

1. (1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (7, -2, 6)$,　$V = 3$.

   (2) $\boldsymbol{u} = \pm(2, -2)$.

   (3) $\boldsymbol{u} = (2, -3)$.

   (4) $\boldsymbol{u} = (1, -2)$ のとき最大値 5 を取る．

   (5) 対偶を示す．$\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(h)$ をみたす $C^\infty$ 級関数 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在するとき，$h$ の偏微分の順序は交換可能だから $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0$.

2. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 8x - 6y$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 4y$,　$\mathrm{div}\boldsymbol{W} = 8x + 6y$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 0$.

   (2) (1) より $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq 0$ だから，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる $f$ は存在しない．

   (3) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{l}(t)) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos^2 t - \sin^2 t \\ 2\cos t \sin t - 3\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\cos^2 t \sin t + \sin^3 t - 3\sin^2 t \cos t$. ここで

$$-\cos^2 t \sin t = \Big(\frac{1}{3}\cos^3 t\Big)', \quad \sin^3 t = \sin t - \sin t \cos^2 t = \sin t + \Big(\frac{1}{3}\cos^3 t\Big)', \quad -3\sin^2 t \cos t = -(\sin^3 t)'$$

   だから

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \Big[\frac{2}{3}\cos^3 t - \cos t - \sin^3 t\Big]_0^\pi = \frac{2}{3}.$$

   (4) $g(\boldsymbol{u}) := x^3 + xy^2 + y^3$ とおくと $\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(g)$.

   (5) (4) より

$$\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{m} = g(\boldsymbol{m}(\sqrt{\pi})) - g(\boldsymbol{m}(0)) = g(-1, 0) - g(1, 0) = -2.$$

3. (1) $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を，$0 \le t \le 3$ では

$$\boldsymbol{l}(t) = \begin{cases} (\cos \pi t, \sin \pi t) & 0 \le t \le 1, \\ (t-2, 0) & 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

   で定め，一般には $3n \le t < 3(n+1)$ のとき $\boldsymbol{l}(t) := \boldsymbol{l}(t - 3n)$ で定めればよい．（※答は他にもあります）

   (2) $f(\boldsymbol{u}) := \dfrac{1}{\sin x + \cos y + 3}$ とすると $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ だから，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{l}(3)) - f(\boldsymbol{l}(0)) = f(1, 0) - f(1, 0) = 0$.

   (3) 極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で表すと $\Omega = \{0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi\}$. また $dxdy = rdrd\theta$ である．$\boldsymbol{W}$ は $\mathbb{R}^2$ 上で定義されており，$\mathrm{div}\boldsymbol{W} = (x^2 + y^2)^3 = r^6$ だから，Gauss の発散定理より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, dl = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{W} dxdy = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^\pi r^6 \cdot rdrd\theta = \pi\Big[\frac{r^8}{8}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

4. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = -\dfrac{6xy}{(x^2 + 4y^2)^2}$,　$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$.

   (2) $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{3}{2}$.

   (3) $\boldsymbol{l}$ で表される曲線 $L$ は図 1 のようになる．$\boldsymbol{l}$ を周期 2 になるよう $\boldsymbol{l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に拡張し，$L_1 := \boldsymbol{l}([-1/2, 1/2])$, $L_2 := \boldsymbol{l}([1/2, 3/2])$ とすれば，求める積分は $L_1$ 上の積分と $L_2$ 上の積分の和である．

   十分小さい $\epsilon > 0$ に対し $\boldsymbol{m} := (2\epsilon\cos(-t), \epsilon\sin(-t))$ で表される閉曲線を $M$ とし，$L_1$ と $M$ で囲まれる有界領域を $\Omega$ とする．$\boldsymbol{V}$ は $\Omega$ 上定義され，$\partial\Omega$ は向きも込めて $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{m}$ で表されるから，Green の公式と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$ より

$$\int_{L_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = \int_\Omega \mathrm{rot}\boldsymbol{V} dxdy = 0.$$

   よって

$$\int_{L_1} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\epsilon^2(\cos^2 + \sin^2 t)} \begin{pmatrix} \epsilon\sin t \\ 2\epsilon\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\epsilon\sin t \\ -\epsilon\cos t \end{pmatrix} dt = \pi.$$

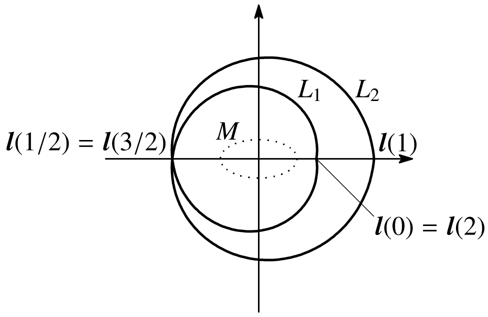


図 1　曲線 $L$

$L_2$ についても，まったく同様に考えれば

$$\int_{L_2} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \pi$$

となるから，求める積分値は $\pi + \pi = 2\pi$.

解説.

1. この講義で導入した関数やベクトル場の定義を知っているか，基本的な関数の取り扱いができるか，を問う問題．(1) は $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ を使うと簡単．(2) はレポート 2 と同様．(3) は $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = (x-2)^2 + (y+3)^2$ となる．(4) は $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(g)) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 5 - (x-1)^2 - (y+2)^2$.
2. 線積分（その 1）についての理解を問う問題．(2) は問題 1. (5) がヒントになっている．別解として，(3) を先に計算し，$\boldsymbol{l}$ と端点を共有する別の曲線，例えば $\widetilde{\boldsymbol{l}}(t) = (-t, 0)$ $(-1 \leq t \leq 1)$ などに沿った線積分が (3) と一致しないことを示す，という方法もある．
3. 線積分（その 2）についての理解を問う問題．$\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とする半径 1 の円の「上半分」と $x$ 軸で囲まれる領域が $\Omega$ である．(2) の「$f = \cdots$ とおくと $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ だから」，(3) の「Gauss の発散定理より」などはしっかり書いてほしい．$\boldsymbol{W}$ が $\Omega$ を含む領域上で定義されることも言及すべきだが，それは自明であろう．
4. Green の公式を使った応用．$\boldsymbol{l}(t)$ と原点の距離 $r(t) := 2 - |t-1|$ は，$0 \leq t \leq 1$ において 1 から 2 に増加し，$1 \leq t \leq 2$ において 2 から 1 に減少する．このことから，$\boldsymbol{l}$ は原点のまわりを一周しただけでは $\boldsymbol{l}(0)$ に戻らず，$t = 1$ から 2 まで動いて（もう一周して）初めて $\boldsymbol{l}(2) = \boldsymbol{l}(0)$ となることがわかる．$\boldsymbol{l}(a) = \boldsymbol{l}(b)$ となるには偏角が $2\pi$ のずれを除いて等しくならないといけないから $b = a + 1$ しかあり得ず，$r(a) = r(b)$ も併せて考えれば $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{3}{2}$ がわかる．
   $\boldsymbol{l}$ を周期 2 になるよう $\boldsymbol{l}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に拡張すると，積分区間は $[-1/2, 3/2]$ とみることもできる．この区間の「前半」が $L_1$（内側の閉曲線），「後半」が $L_2$（外側の閉曲線）である．$\boldsymbol{l}$ は講義でやった意味での閉曲線にはなっていないが，$L_1$ と $L_2$ は区分的に正則な閉曲線になっており，$\boldsymbol{V}$ が定義されない原点をくりぬくように閉曲線 $M$ を考えれば，$M$ と $L_k$ $(k = 1, 2)$ で囲まれる領域に Green の定理を適用できる．
   同様に考えると，原点のまわりを $n$ 回まわる閉曲線 $L$ に対し，$\int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = n\pi$ であることもわかる．ただし回数は反時計回りを正の方向として符号つきで数える．例えば反時計回りに 2 周したあと時計回りに 3 周引き返した場合は $2 - 3 = -1$ 周と数える．この意味で，$\boldsymbol{V}$ は曲線が原点のまわりを何周したか測る機能を持ったベクトル場であると言える．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 \times 3 = 12$,　**4**: $2 + 2 + 4 = 8$)