2018 年度 幾何入門 中間試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 24.7 点，最高点は 37 点でした．人数分布は以下の通りです：

点数	~ 15	16 ~ 20	21 ~ 25	26 ~ 30	31 ~ 35	36 ~ 40
17S	5	6	11	16	8	1
それ以外	1	3	6	3	0	2

問題ごとの平均点は以下の通りです（問題 2. (5) については下記参照）：

17S :

問題	1					2				3			4			計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	
平均	2.3	0.6	2.2	2.2	1.3	2.6	2.2	1.0	2.7	1.0	1.3	0.1	1.4	0.8	0.0	24.7

17S 以外：

問題	1					2				3			4			計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	
平均	2.7	0.9	2.6	1.9	1.6	2.4	1.9	0.6	2.1	1.3	1.3	0.0	1.7	0.8	0.0	24.9

答案用紙 No. 1 の右上に赤で中間試験の点数が，青でレポート **1〜7** の点数の合計（最大 14 点）が書いてあります．大問ごとの点数は答案の終わりあたりに書いてあります（裏面の場合あり）．部分点はその都度書いてあります．

●問題 2. (5) は $\int_m \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{m}$ を計算してもらうつもりでしたが，迂闊にも書き間違えてしまいました．大変すみません．$\boldsymbol{V}$ のままでも (3) と同様に計算可能ではありますが，当然 $\boldsymbol{W}$ の線積分が想定されるところであり，混乱をきたしたと思いますので，答案内容に関わらず全員正解の扱いとします．

なお，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる f は存在しないので，「$\boldsymbol{l}$ に沿った積分と同じである」というのは誤りです．また $\boldsymbol{m}$ は閉曲線ではないので領域の境界にはなっておらず，従って Green の公式なども（そのままでは）適用外です．

●問題 1, 2 で点を稼いでもらうつもりでしたが，どちらも良くありませんでした．高校や大学 1 年でやったはずの基本的な計算能力は，この講義に限らず，今後いろいろな数学をやる上での基礎になります．高校と大学の数学は，雰囲気は違いますが，別物ではありません．1 ができなかった人は危機感を持ってください．

●問題 1. (2) はレポート 2 とほぼ同じ問題でしたが，できていませんでした．一度やってできなかった問題は当然復習してできるようにしておかなければなりません．高校と大学の数学は，雰囲気は違いますが，勉強の仕方が大きく変わるわけではありません．復習することが大切なのは一緒です．

●例えば問題 1 の (5) で，$\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(h)$ をみたす h の存在を仮定しているのか主張しているのか明確でなく，何をしたいのかわからない答案がとても多く見られます．話したり文章を書いたりして**誰かに自分の考えを伝えようとするとき，本人がその内容に責任を持たなければいけません**．自信を持って人に見せられる文章になっているか，**客観的な視点でよく見直す**ことが大切です．自分が書いたものを客観的に読むのは案外難しいので，誰かに読んでもらうのも一つの手でしょう．そういったことを**時間をかけて繰り返す**ことで，コミュニケーション能力が鍛えられるのだと思います．時間をかけることが大切で，レポート問題を解く機会などを利用して日頃から訓練しなければなりません．教科書や板書などに書かれている文章も参考になるかもしれません．

●答のみを問う問題では，基本的には答のみを見て採点していますが，途中経過が大きく間違っている場合は減点している場合もあります．必要なことはもれなく書く必要がありますが，余計なことは書かないのも鉄則です．あえて隙を見せることはありません．

以下，問題ごとのコメントです．

1. (5) 背理法で示していた答案が多かったのですが，対偶を示すほうが好ましいと思います（ほぼ同じ文章で対偶の証明に書き換えられるはずです）．背理法は誤った仮定から出発するので，途中で補助的に何かを証明したとしても，最終的にはその真偽がわからないことになり，他で利用できないのでムダになってしまいます．
2. (2)「$y = 0$ のときは $f = x^3$ とおけば $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$」という類の答案がいくつかありましたが，これは誤りです．どこに誤解があるか，次の 2 つの説明のどちらかで納得できるでしょうか：
   - (i) 講義でははっきり述べていませんが，$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ については，「$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(f)$ となる f が存在する $\iff$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$」が成立します．「$\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = 0$」というのは定数関数 0 である，つまり「任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ に対し $(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$」ということであって，「$(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u}$ が存在する」こととは違います．
   - (ii) $\mathrm{grad}(f)$ というのは 2 変数関数に対し定まる $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場です．「$y = 0$ のとき」というのは，$\mathbb{R}^2$ の x 軸上に制限した 1 変数関数を考えていることに相当します．

   (4) g を求める過程を書くなら「$\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(g)$ とすると，…だから，$g = \cdots$ でなければならない．逆に $g = \cdots$ とおけば，確かに $\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}(g)$ となっている」のように書く必要があります．この答案の後半だけを取り出し，天下り的に「$g = \cdots$ とおくと…」という答案が良いと思います．
3. (1) まずは領域を正しく把握することが肝心です．答は 2 つくらいに場合分けして書くと思いますが，特に「切れ目」（正則でなくなるところ）の t の値を代入して，本当に領域を正しく表しているか確かめる，という作業をしてみるべきでしょう．例えば「$4n - 1 \leq t \leq 4n + 1$ のとき $\boldsymbol{l}(t) = (t - 4n + 1, 0)$」のような答案は，$\boldsymbol{l}(4n + 1) = (2, 0)$ になってしまっているので，$\boldsymbol{l}$ は $\partial\Omega$ を表さない誤った答なのは明らかです．

   (3) 関数や領域の対称性を使って計算を簡略化しようとするのはよいのですが，そのやり方が間違っている答案がほとんどです．例えば

   （誤り） 関数の対称性より $$\int_{x=-1}^{1}\Big(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6)dy\Big)dx = 8\int_{x=-1}^{1}\Big(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} x^6\,dy\Big)dx$$

   などがその例です．x^6 のグラフと xy 平面上の Ω で挟まれる領域は，x^4y^2 のグラフと Ω で挟まれる領域とはまったく違う形をしており（絵で描くのは難しいが），従って積分値も異なることが見て取れます．例えば

   $$\begin{aligned}\int_{x=-1}^{1}\Big(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6)dy\Big)dx &= 2\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6)dy\Big)dx \\ &= 4\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^6 + 3x^4y^2)dy\Big)dx\end{aligned}$$

   なら正しい計算です．1 つめの等号は y で積分した後に得られる x の関数が偶関数であること，2 つめの等号は直線 $y = x$ に関する x^6 と y^6 の対称性，x^4y^2 と x^2y^4 の対称性によります．
4. (3) (2) でわかるように，$\boldsymbol{l}$ は自分と交わるような曲線を表しますから，「$\boldsymbol{l}$ が囲む領域」と書いても，どの領域かわかりません．また Ω という記号が断りなく現れる答案がいくつかありました．確かに講義では領域を Ω という記号で表すことが多かったのですが，せめて「$\boldsymbol{l}$ が囲む有界領域を Ω とする」のような説明がないと，何のことかわかりません．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，早めに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

●レポートも含めた現在までの点数を見て，あとどれくらいの点数を取りたいか / 取らなければならないかを確認し，今後の学習のやり方を考えてください．追試などの**救済措置は一切取らない**ことは明言しておきます（レポートで十分なはず）．