特に断らなければ $\boldsymbol{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とする．ベクトルは縦横のどちらで書いても差し支えない．$\partial_x f := \dfrac{\partial f}{\partial x}$ のような略記は断りなく用いてよい．答のみ問う問題でも，誤りを含む途中経過が書かれている場合は減点対象となり得る．

1. (1) ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} xz^2 + 2xy + 5x \\ yx^2 - 4yz + 6y \\ zy^2 + 6zx + 3z \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{div}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{u}) = 0$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (2) ベクトル場 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} y^3 + z^3 \\ z^3 + x^3 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}$ に対し，$(\mathrm{rot}\boldsymbol{W})(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (3) 関数 $f(\boldsymbol{u}) := xy + yz + zx + x + y + z$ に対し，$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．（答のみでよい）

   (4) ベクトル場 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u}) := \begin{pmatrix} e^{2y(z^4+1)} \\ \cos(z^4 + x^6) \\ \sin x(y^2 + 2) \end{pmatrix}$ に対し，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U})$ を計算せよ．（答のみでよい）

   (5) $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{0}$ をみたすとき，$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(g)$ となるような C^∞ 級関数 $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを証明せよ．

2. $f(\boldsymbol{u}) := x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 12$ とし，$S := f^{-1}(0)$ とおく．

   (1) $k \in \mathbb{R}$ とする．S を平面 $y = k$ で切った切り口は円であることを示せ．また，その半径が最小になるような k と，半径の最小値を求めよ．

   (2) S は曲面であることを示せ．

   (3) S の向き $\boldsymbol{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$ で $\boldsymbol{n}(3, 4, 1) = (-1, 0, 0)$ をみたすものを求めよ．（答のみでよい）

   (4) $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \in S$ に対し，部分ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{v}}S \subset \mathbb{R}^3$ を表す方程式を求めよ．（答のみでよい）

   (5) $(2, -2, 1) \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ となるような $\boldsymbol{w} \in S$ をすべて求めよ．

3. (1) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (100x^2 + 121y^2 + 144z^2)^2 = 1\}$ とおく．E は曲面であることを示せ．

   (2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ に対し，$\mathrm{div}\boldsymbol{V}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (3) $\displaystyle\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし E の向きは $\boldsymbol{n}_E\left(\dfrac{1}{10}, 0, 0\right) = (-1, 0, 0)$ となる法ベクトル $\boldsymbol{n}_E\colon E \to \mathbb{R}^3$ で与える．

4. $\mathbb{R}^3$ から z 軸を除いて得られる領域を Ω とし，Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) := \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2 + 4y^2}$ で定義する．また $L \subset \Omega$ を，次のようなパラメータ $\boldsymbol{l}$ で表される閉曲線とする．
   - $\boldsymbol{l}(t) = \big(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t), z(t)\big)$ と表すとき，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対し $r(t) > 0, \theta'(t) > 0$.
   - $\boldsymbol{l}$ は周期 1 の周期的パラメータ．
   - $H := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$, $t_i := \dfrac{i}{n}$ (n は自然数，$i = 0, \ldots, n-1$) とおくとき，$L \cap H = \{\boldsymbol{l}(t_0), \boldsymbol{l}(t_1), \ldots, \boldsymbol{l}(t_{n-1})\}$.

   このとき次の問いに答えよ．

   (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V}, \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ を求めよ．（答のみでよい）

   (2) $n = 1$ のとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

   (3) $n = 2$ のとき，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}$ を計算せよ．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3 \times 5 = 15$,　**2**: $3 \times 5 = 15$,　**3**: $4 + 3 + 5 = 12$,　**4**: $2 + 3 + 3 = 8$)