幾何入門 期末試験（2018 年 8 月 3 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $\boldsymbol{u} = (-3, -1, 2)$.

(2) $|x| = |y| = |z|$ をみたすすべての $\boldsymbol{u} = (x, y, z)$.

(3) $\boldsymbol{u} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(4) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U}) = 0$.

(5) 対偶を示す．C^∞ 級関数 $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ により $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(g) = (\partial_x g, \partial_y g, \partial_z g)$ と表されるとすると，g に関しては偏微分の順序交換が可能だから

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(g)) = \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_z g) - \partial_z(\partial_y g) \\ \partial_z(\partial_x g) - \partial_x(\partial_z g) \\ \partial_x(\partial_y g) - \partial_y(\partial_x g) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

2. (1) S の $z = k$ での切り口は

$$\{(x, k, z) \mid x^2 - k^2 + z^2 - 4x + 8k - 2z - 12 = 0\} = \{(x, k, z) \mid (x-2)^2 + (z-1)^2 = (k-4)^2 + 1\}.$$

これは平面 $y = k$ 上の $(2, k, 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{(k-4)^2+1}$ の円である．その半径は $k = 4$ のとき最小値 1 を取る．

(2) (1) より $S \neq \emptyset$. $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2(x-2, -y+4, z-1)$ である．これが $\boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{u} = (2, 4, 1)$ のときのみだが，$f(2, 4, 1) = 1$ だから $(2, 4, 1) \notin S$ であり，従って S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$. よって S は曲面である．

(3) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}) = -\dfrac{(x-2, -y+4, z-1)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2}}$.

(4) $(a-2)x + (4-b)y + (c-1)z = 0$.

(5) $\boldsymbol{w} = (a, b, c) \in S$ とし，$(2, -2, 1) \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ とする．$T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S = \langle \mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{w}) \rangle$ だから，$k(2, -2, 1) = (a-2, -b+4, c-1)$ をみたす $k \in \mathbb{R}$ が存在する．$\boldsymbol{w} \in S$ より $(a-2)^2 - (b-4)^2 + (c-1)^2 = 1$ だから $4k^2 - 4k^2 + k^2 = 1$, よって $k = \pm 1$. 従って $\boldsymbol{w} = (4, 6, 2)$ または $(0, 2, 0)$.

3. (1) $f(\boldsymbol{u}) := 100x^2 + 121y^2 + 144z^2 - 1$ とおくと $E = f^{-1}(0)$. まず $f\left(\frac{1}{10}, 0, 0\right) = 0$ より $E \neq \emptyset$. また $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2(100x, 121y, 144z)$ が 0 になるのは $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のときのみだが，$f(\boldsymbol{0}) = -1 \neq 0$ だから $\boldsymbol{0} \notin E$ であり，従って E 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$. よって E は曲面である．

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$.

(3) $S^2 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| = 1\}$ とおき，S^2 の向きを $\boldsymbol{n}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ となる $\boldsymbol{n}\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ で定める．S^2 と E で囲まれる領域を Ω とおくと $\partial\Omega = E \cup S^2$. $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}_E$ はともに Ω から外側に向かう法ベクトルで（図 1 参照），$\boldsymbol{V}$ は Ω を含む領域上で定義されるから，Gauss の発散定理と (2) から

$$\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} + \int_{S^2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = 0.$$

これと S^2 上 $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ であることから，$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{W}(x, y, z) := (x, y, z)$ に対し

$$\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = -\int_{S^2} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S}.$$

$D^3 := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{u}| \leq 1\}$ とおけば $\partial D^3 = S^2$ で，$\boldsymbol{n}$ は D^3 から外側に向かう法ベクトルであり，$\boldsymbol{W}$ は D^3 を含む領域上で定義されるから，Gauss の発散定理より

$$\int_E \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = -\int_{S^2} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, d\boldsymbol{S} = -\int_{D^3} \mathrm{div}\boldsymbol{W}\, dxdydz = -3\int_{D^3} dxdydz = -3(D^3 \text{の体積}) = -4\pi.$$

4. (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = -\dfrac{6xy}{(x^2+4y^2)^2}$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$.

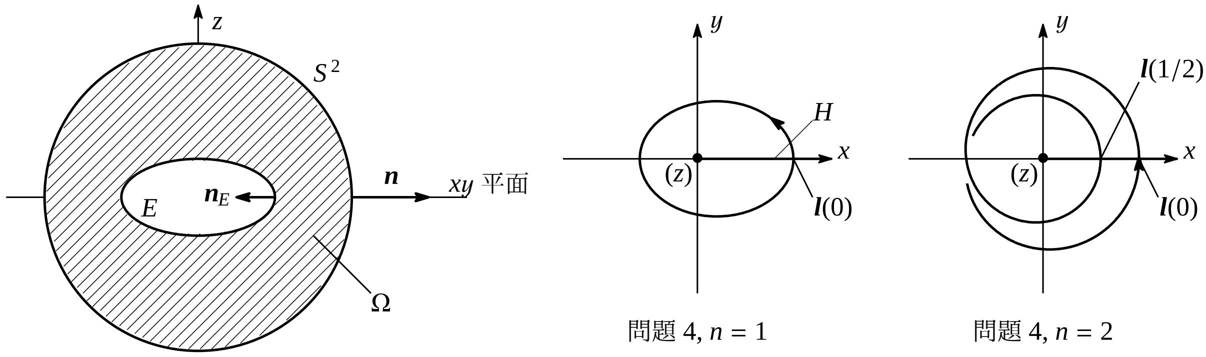

図 1　問題 3, 4 の図

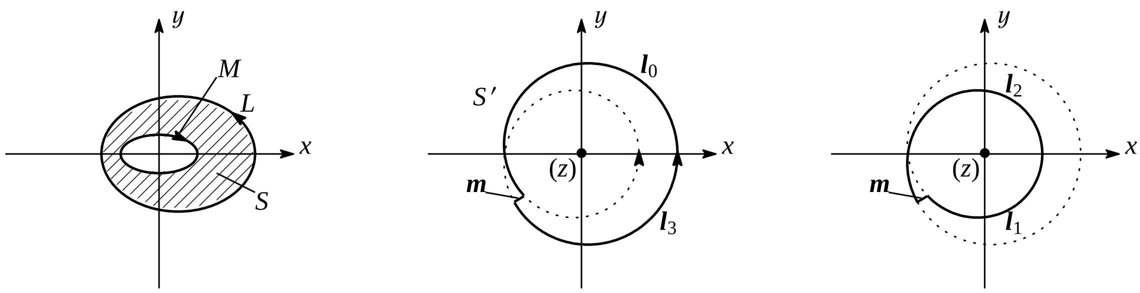

図 2　問題 4 (2), (3)

(2) $n = 1$ のとき, 条件から L はおおむね図 1 のようになり, 十分小さい $\epsilon > 0$ を取り $\boldsymbol{m}(t) := \epsilon(2\cos(-t),\ \sin(-t),\ 0)$ で表される閉曲線を M とすれば，向きも込めて $\partial S = L \cup M$ となる Ω 内の向きづけ可能コンパクト曲面 S を取れる（図 2 を参照せよ）. Stokes の定理と (1) より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\epsilon^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \begin{pmatrix} \epsilon\sin t \\ 2\epsilon\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \epsilon \begin{pmatrix} -2\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \pi.$$

(3)（図 2 を参照せよ）$k = 0, 1, 2, 3$ に対し，$\boldsymbol{l}_k := \boldsymbol{l}|_{[k/4,\,(k+1)/4]}$ とおく. また $\boldsymbol{l}(1/4)$ から $\boldsymbol{l}(3/4)$ に向かう曲線を考え，そのパラメータ $\boldsymbol{m}$ を取る. $\boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}_3$ をつないでできる曲線に対し (2) を適用すると

$$\int_{\boldsymbol{l}_0} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_0 + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} + \int_{\boldsymbol{l}_3} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} = \pi. \qquad (*)$$

$\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{l}_2$ に沿った積分も，$\boldsymbol{m}$ の向きに注意して同様に考えると，

$$\int_{\boldsymbol{l}_1} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_1 - \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m} + \int_{\boldsymbol{l}_2} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_2 = \pi. \qquad (**)$$

$(*)$, $(**)$ より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{k=0}^{3} \int_{\boldsymbol{l}_k} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}_k = 2\pi.$$

補足.

1. (1)〜(3) はそれぞれ $\mathrm{div}\boldsymbol{V} = (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{W} = 3(y^2 - z^2,\ z^2 - x^2,\ x^2 - y^2)$, $\mathrm{grad}(f) = (y+z+1,\ z+x+1,\ x+y+1)$ であることを使う. (4) はまともに計算してはダメで，一般に $\boldsymbol{U}$ が C^∞ 級なら $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{U}) = 0$ であることを自分で確かめてあれば容易（演習 13, 14 参照）. 中間試験を復習した人にとって (5) はやりやすかったはず.
2. S は「y 軸に平行」な一葉双曲面の一部. 平面 $y = k$ で切ると常に円が現れる（演習 14 参照）. (2)〜(5) は演習 12, 問題 2 (2) や演習 14, 問題 2 (3), レポート 9, 10 などと同様.
3. 演習 12 の問題 2, あるいは教科書の例題 2.29 と同様の問題. E は楕円を軸のまわりに回転して得られる曲面で，座標軸との交点は $(\pm1/10,\ 0,\ 0)$, $(0,\ \pm1/11,\ 0)$, $(0,\ 0,\ \pm1/12)$ である. $\boldsymbol{V}$ が $\boldsymbol{0}$ で定義されていないので,「$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$

だから Gauss の発散定理より $\displaystyle\int_E \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = \int_\Omega 0\,dxdydz = 0$」というのは誤り．解答例の Ω 上では $\boldsymbol{V}$ が定義されるから Gauss の発散定理を使える．

解答例で $\boldsymbol{V}$ の積分を $\boldsymbol{W}$ に置き換えているところについて少し詳しく見ておく．S^2 の局所座標 $\boldsymbol{\varphi}\colon U \to S^2$ に対し，$A := \boldsymbol{\varphi}(U) \subset S^2$ とおくと

$$\int_A \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = \int_U \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(s,t)dsdt \tag{$*$}$$

だが，$\boldsymbol{\varphi}(s,t) \in S^2$ だから $|\boldsymbol{\varphi}(s,t)| = 1$ で，従って $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ の定義から

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}(s,t)) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(s,t)}{\sqrt{|\boldsymbol{\varphi}(s,t)|^3}} = \boldsymbol{\varphi}(s,t) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\varphi}(s,t))$$

である．よって $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{W}$ に置き換えても $(*)$ の値は変わらない．S^2 上での積分とは，このように局所座標上で積分した値を足し合わせたものだから，S^2 上での $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ の積分は等しいことがわかる．

より一般に，向きづけ可能な曲面 S 上で $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ である限り（他の点で $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{W}$ であっても），$\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{S}$ であることもわかる．

4. 中間試験の問題 4 と本質的に同じ問題である．問題文や解答例の計算方法を見比べよ．解答例と同様に考えると，$\boldsymbol{l}$ が y 軸の正の方向に向かって H を k 回横切り，y 軸の負の方向に向かって H を l 回横切るとき，積分値は $(k-l)\pi$ であることもわかる．つまり $\boldsymbol{V}$ の積分は，曲線が x 軸のまわりを「何周したか」を測る機能を持っている．

   (2) の $\epsilon > 0$ については，$r(t)$ の最小値より小さい値を取れば十分．$\boldsymbol{l}$ の周期が 1 であることから r も $r(t+1) = r(t)$ をみたす周期的な関数で，従って $0 \le t \le 1$ 上での最小値を考えれば（それは存在し正である），その値が $\mathbb{R}$ 上での最小値にもなる．

配点：15, 15, 12, 8　(**1**: $3\times5 = 15$,　**2**: $3\times5 = 15$,　**3**: $4+3+5 = 12$,　**4**: $2+3+3 = 8$)