2018 年度 幾何入門 期末試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 27.1 点，最高点は 38 点でした．人数分布は以下の通りです：

点数	~ 15	16 ~ 20	21 ~ 25	26 ~ 30	31 ~ 35	36 ~ 40
17S	0	7	9	14	13	2
17S 以外	1	1	4	6	2	1

問題ごとの平均点は以下の通りです：

問題	1					2					3			4			計
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	
17S	2.9	2.1	2.5	2.5	2.0	2.5	2.4	0.7	2.2	1.7	2.7	1.7	0.0	1.6	0.0	0.0	27.5
他	3.0	2.1	2.8	2.6	2.3	2.2	2.0	0.2	1.9	1.2	1.9	2.2	0.0	1.5	0.0	0.0	25.9

答案用紙 No. 1 の右上に赤で書いてあるのが期末試験の点数，青はレポート 1 ~ 14 の点数の合計 (+2)[*1] です（最大 30 点）．また，○で囲ったアルファベットは最終的な成績です：

S：「秀」，　**A:**「優」，　**B**：「良」，　**C**：「可」，　**F**：「不可」

大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．
最終的な成績の分布は以下の通りです．平均点は 65.7 点，最高点は 93 点でした．

成績	不可 (F)	可 (C)	良 (B)	優 (A)	秀 (S)
17S	13	16	13	5	2
17S 以外	9	4	5	0	0

講義や演習，レポート問題で取り上げた問題，また中間試験の問題の 3 次元版が，かなりの部分を占めていたと思います．直前になって昨年の期末試験を覚えただけではダメで，学んだことを振り返って身につける作業を日頃からコツコツやっておかないと，新たな問題に出会ったときに対処する力が養われません．
また，自分の文章は誰かに読まれるということを意識して書かないといけません．「C^∞級だから」と書いてあっても，どれが C^∞ 級なのか，状況によっては意味を理解してもらえません．読む人がどう受け取るかを想像して，きちんと「g は C^∞ 級だから」のように書くべきです．このようなことも日頃から気を配っていないと（気を配っていても）難しいことで，重要な場面で急に頑張ろうと思っても無理です．せっかく時間をかけて勉強しているのですから，社会に出たときに生かされるような学習（数学的な内容とは限らない）をしてほしいものです．

以下，問題ごとのコメントです．

1. (2) “ $(\pm a, \pm a, \pm a)$ ” と書くと，普通は複号同順の意味に取られると思います．「複号任意」と書いておくべきです．
   (4) $\boldsymbol{U}$ の第 3 成分について「$(\sin x)(y^2+2)$ と $\sin(x(y^2+2))$」のどちらの意味か，という質問がありましたが，普通は後者の意味ではないかと思います．前者の意味にしたい場合は，紛れのないように $(y^2+2)\sin x$ と書くのが普通だと思います．もっとも，この問題ではどちらでも答に影響はありません．
   (5) 中間試験の問題 1 (5) とほぼ同じ問題です．2 度目なので若干辛く，「$\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}(g)$ と（仮定）する」「偏微分の順序交換が可能だから」のようなポイントが押さえられていなければ減点しました．
2. (1)「円である」と述べるときに $k^2 - 8k + 17 > 0$ であることに言及すべきでしょうが，答案のどこかで触れてあれば可としました．
   (2) $S \neq \emptyset$ と，$\mathrm{grad}(f)$ が S 上 $\mathbf{0}$ にならないことを確認すればよいのですが，この 2 つの議論が混在している答案

[*1] レポートは 各回 2 点 × 14 回 ですが，30 点分つけると最初に宣言しましたので，中間・期末試験を両方受験した人には +2 点つけました

が多数あります．例えば

（適切でない）　$\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u} = (2,4,1)$. ここで $f(3,4,1) = 1$ より $S \neq \emptyset$.
また $f(2,4,1) = -1 \neq 0$ だから S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$

のような答案です．「ここで〜$S \neq \emptyset$」のところだけ別のことを話題にしているわけで，聞いているほうは急に話が飛んで困惑することでしょう．これは問題 3 (1) でも同様です．

(3) “ $\boldsymbol{n} = -(x-2, -y+4, z-1)$ ” は誤りです．$\left|\mathrm{grad}(f)\right| \neq 1$ だからです．

(4) 与えられた定数 a, b, c と変数 x, y, z を混同した人がいます．$T_{\boldsymbol{u}}S$ は部分ベクトル空間なので $(x, y, z) = \boldsymbol{0}$ を通るはずです．

(5) $T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ の基底として $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{w})$ を取れる，ということを明記してください．逆にそのことが明記してあれば，多少計算を間違えてもさほど減点していません．

3. (1) “ $(1/10, 0, 0)$ を E に代入すると ” のような記述がときどき見られました．E は集合です．何か代入するとすれば「E の定義式に」でしょう．このような適切でない記述は他にもいろいろありました．

(3) 正解者はおらず，「$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$ だから Gauss の発散定理により 0」という答がたくさんありました．演習のときにほぼ同じ問題をやったはずなので，この結果は残念です．

4. (1) 中間試験の問題 4 (1) とほぼ同様です．片方だけ正解の場合は 1 点です．

(2) 問題は「条件をみたす任意の曲線に対し」ということですから，例えば $\boldsymbol{l}(t) = (2\cos t, \sin t, 0)$ に対してだけ計算しても不十分です．しかし解答例を見ればわかるように，この $\boldsymbol{l}$ が本質的です．Stokes の定理と $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ であることから，2 つの閉曲線 $L, L' \subset \Omega$ が，$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (z$ 軸$)$ 内のある向きづけ可能コンパクト曲面 S が存在して $\partial S = L \cup L'$ となるような関係にあるとき，適切に向きを選べば $\displaystyle\int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{L'} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}'$ となります．このことを利用して計算しやすいパラメータに話を移し替えてしまえばいい，というのがこの問題のアイデアです．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，成績を確定させる予定の 8/17（金）までに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

まとめ，今後の展望

今後学ぶ数学のほとんどは，何らかの意味で，線形代数または微分積分（または両方）を発展させたものです．この講義で扱った内容（ベクトル解析）はその発展のスタート地点のような位置づけです．1 変数関数 $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ の一般化であるベクトル場 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し，微分の一般化として grad, div, rot といった作用素を，積分の一般化として線・面積分を定義しました．これらは (i) 力学や電磁気学などに由来し，(ii) 微分積分学の基本定理の拡張と言える Gauss の発散定理や Stokes の定理が成り立つ，という 2 つの理由により，正当な一般化であると言えます．また曲線の接線や曲面の接平面を関数の 1 次近似として捉えることで，Taylor 展開の幾何学的意味がある程度明確になりました．接線や接平面はベクトル空間なので，幾何学に線形代数を適用するための足掛かりとなります．

昨年度もそうだったのですが，$\mathbb{R}^2$ 内の曲線と $\mathbb{R}^3$ 内の曲面に関するいろいろな議論が平行に進んでいることを繰り返し注意しながら進めてみました．このことがある程度納得できると，2 次元や 3 次元にこだわる必要がなく，より一般の次元で同様のことができそうだということに気づきます．こういった一般化は，話を抽象的にしてわかりにくくするように見えますが，実は逆です．例えば Stokes の定理の証明は何をしているのか見えづらかったと思いますが，**多様体論**を学んで曲線や曲面を **$\boldsymbol{n}$ 次元多様体**にまで一般化し，より高い視点から考察すると，もう少し見通しよく，しかもずっと強力な形で Stokes の定理を証明することができます．また Stokes の定理が**関数論**で学んだ正則関数の線積分に関する Cauchy の積分定理に似ていることに気づいた人もいると思いますし，**トポロジー**や**ホモロジー論**などを学んだ上でベクトル解析の内容を振り返ると，微積分の基本定理の幾何学的な意味合いをより深く理解できます．そのようなつながりについては今後の講義に譲りたいと思います．

(8/6)