2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 4

担当：境 圭一

問題 1. 次の 2 次正方行列は逆行列を持つか判定せよ．逆行列を持つときは，それを求めよ．（教科書の例 1.4.6, または講義の定理 3.7 参照）

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\-3&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1/3\\6&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\quad(a,b\in\mathbf{R})$$

問題 2. $\theta\in\mathbf{R}$ に対し，$R_\theta := \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおく．

(1) R_θ の幾何学的意味を考えることにより（演習問題 3 の問題 1 を参照），$(R_\theta)^{-1}=R_{-\theta}$ であることを（計算することなく）説明せよ．

(2) $R_\theta R_{-\theta}=E_2$ であることを，実際に計算して確かめよ．

問題 3. A を $m\times n$ 行列とするとき，$E_mA=A, AE_n=A$ であることを確かめよ．

問題 4. $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&4&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ は正則かどうか判定せよ．

補足.

(i) $n\times n$ 行列 A が**正則行列**であるとは，$AB=E_n, CA=E_n$ をみたす B,C が存在することでした．このようなとき，実は $B=C$ が成り立ち，$AB=E_n$ をみたす B はこの B の他には存在しないことを講義で見ました（つまり，$AB'=E_n$ も成り立つとすると自動的に $B'=B$ になってしまう）．このような B を $B=A^{-1}$ と書き，B の**逆行列**とよびます．気持ちとしては 0 でない実数 a の逆数 $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ に対応するものですが，行列の場合は "$\dfrac{1}{A}$" という書き方はしません．実数の場合と異なり，$A\neq O$ であっても A^{-1} が存在するとは限りません．また上で述べた「$B=C$ となる」「このような B は他にはない」という部分は，実数の逆数についてはほとんど当たり前のことですが，行列の場合には確認を要することです（行列の積は非常に複雑なものだから）．

(ii) 講義では 2×2 行列が正則であるための必要十分条件を求めましたが，$n=2$ でもすでに十分めんどうだったと思います．この調子で 3×3 行列，4×4 行列，…と考えていくのは大変そうです．この講義の後半では，一般の $n\times n$ 行列について，もっと系統立てて学びます．
なお，1×1 行列 $\begin{pmatrix}a\end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $a\neq 0$ で，このとき $\begin{pmatrix}a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ です．

(iii) 教科書の命題 1.10 の証明は省略しましたが，重要なのでぜひ自分で考えてみてください．概略を述べておきます：

(1) A の逆行列の定義から $AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$ ですが，立場を入れ替えれば A^{-1} の逆行列が A であることを示す式にもなっています．

(2) 一般に ${}^tA\,{}^tB={}^t(BA)$ でした．この式で $B=A^{-1}$ とおき，${}^tE_n=E_n$ であること（確かめてみてください）を使います．

(3) $rA\left(\dfrac{1}{r}A^{-1}\right)$ を計算してみてください．

(4) $AB(B^{-1}A^{-1})$ を計算してみてください．