

問題 1. Gauss の掃き出し法を使って、次の連立 1 次方程式の解について論じよ.

$$(1) \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x - y - z = -1 \\ 3x - 2y - z = -2 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x + y + 4z = -3 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + 5z = 4 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x - y + z + 2w = 5 \\ 2x - 2y - z - w = 4 \\ -x + 2y + 2z + w = 0 \\ 3x + y - 4z - 2w = -3 \end{cases}$$

問題 2.  $x_1, \dots, x_n$  に関する連立 1 次方程式の係数行列が  $n$  次正方行列  $A$ , 拡大係数行列が  $n$  項縦ベクトル  $\mathbf{b}$  を使って  $(A | \mathbf{b})$  と表されるとする.  $A$  が正則である, つまり逆行列  $A^{-1}$  が存在するとき, この連立 1 次方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \mathbf{b}$$

であることを示せ.

補足. Gauss の掃き出し法による連立 1 次方程式の解法は, 方程式の形によっては必ずしも最短の解き方ではありません. しかし, どんな方程式に対しても使える一般的な方法であることから, 例えば計算機を使うときには有用でしょう. また行列の (行) 基本変形の繰り返しと捉えることができるので, 行列を考えることのありがたみが少し出てきます. また問題 2 のような状況で, もし  $A^{-1}$  がわかっているならば, 解を求める計算は完全に行列の積の計算になります.

行列  $A$  に基本変形を施して階段行列にする方法 (つまり, Gauss の掃き出し法で連立 1 次方程式を解く方法) は, 同じ行列に対しても一通りではありません. しかし, その結果として出てくる階段行列の中のゼロベクトルでない行の数は, 途中の変形の方法によらず, 最初の行列  $A$  のみに依存して定まります. この値を行列  $A$  の階数 (rank) とよび  $\text{rank } A$  で表します. 連立 1 次方程式が解を持つか否か, 持ったとして, その自由度はどれくらいか, というのが  $\text{rank } A$  に関係しそうだというのは 5/8 の講義でやったとおりです. このあたりのことを今後の講義で詳しく見ます.

行列の基本変形は, ある行列を別の行列に変える操作ですから, 変形する前と後の行列を等号で結んではいけません (行列が等しいとは, 対応する成分がすべて等しいことでした). レポートや試験で,  $A$  に基本変形を施して  $B$  に変えることを “ $A = B$ ” のように書いてある答案を非常によく見かけますが, これは誤りです. 例えば “ $A \rightarrow B$ ” のように書いてください.