2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 6

担当：境 圭一

問題． 次の連立 1 次方程式について，（拡大）係数行列の階数を計算し，解の有無，存在する場合は自由度を（方程式を解くことなく）求めよ．また実際に方程式を解き，解の自由度が先に求めたものと一致することを確かめよ．

(1) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+2y=1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-2y+z=0 \\ 4x+y-2z=-3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+2y-3z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=3 \\ 4x+5y-4z+w=5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+2y-3z-w=4 \\ 2x+y-z+w=9 \\ -x+y+2z+3w=6 \\ x+y+z+w=5 \end{cases}$

補足．

(i) 行列 A に基本変形を施すことにより，1 行めから k 行目までがゼロベクトルでなく，その下の行は（あれば）すべてゼロであるような階段行列に変形することができます．このとき $k=\operatorname{rank}A$ と書き，A の階数と呼びます．A が $m\times n$ 行列であるとき，$k=\operatorname{rank}A$ は A の行の数を超えないのは明らかですから $k\le m$ です．また階段行列の行の数を数えていることから，列の数を数えることにもなっていて，$k\le n$ も成り立ちます．すなわち，行列の階数は，その行列の行の数，列の数を超えません．

A が n 次正方行列，つまり $n\times n$ 行列で $\operatorname{rank}A=n$ の場合，A を変形して行きつく階段行列は 5/1 の講義でやった上三角行列で，対角成分はいずれもゼロでない数になることがわかります．

(ii) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ で表される連立 1 次方程式について，A を階段行列に変形するのと同じ変形を拡大係数行列 $\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)$ に施すと，もともと A だったところは上で述べたような階段行列になりますが，もともと $\boldsymbol{b}$ だったところには，$k=\operatorname{rank}A$ 行目より下にもゼロでない数が残るかもしれません．

- すべてゼロであれば $\operatorname{rank}\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=k$ ということです．ことのときは方程式が階段状に変形され，下から順に解くことができます．ただし解は任意定数を含むかもしれません（下記参照）．
- もしゼロでない数があれば，それを使って基本変形 (III) を行い，$k+1$ 行目もゼロでない階段行列にできます．これは $\operatorname{rank}\left(A\,\middle|\,\boldsymbol{b}\right)=k+1$ を意味します．このとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を変形すると “$0=1$” という式が出てくることになり，従って解は存在しません．

このように，解の有無だけであれば，方程式を解かずとも階数の計算だけで判別することができます．

(iii) 例えば $x+y=1$ という方程式の解 (x,y) は 1 つには定まらず，任意の t に対し，$x=t, y=1-t$ は常に解です．これは自由度 1 の解の例です．「自由度」と言っているのは，自由に変化できる任意定数 t を 1 個含む解であることを指しています．後期に学ぶ「線形代数学 II」の言葉を先取りすると「解空間の次元が 1 である」ということになります．別の例として，連立方程式

$$x+y+z=1,\quad 2x+2y+2z=2,\quad 3x+3y+3z=3 \quad (*)$$

は実質的に方程式は 1 つしかなく，任意の s,t に対し，$x=s, y=t, z=1-s-t$ は常に解です．これは自由度 2 の解の例です．多くの場合，解の自由度は「文字数 − 方程式の数」であることを経験的に知っている人も多いと思いますが，上の $(*)$ が示すように，もう少し正確には「文字数 − 実質的な方程式の数」です．「実質的な方程式の数」というのは曖昧ですが，これが（拡大）係数行列の階数に他なりません．