2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 7

担当：境 圭一

問題 1. 次の正方行列の階数を計算することにより，これらが正則であることを示せ．また，これらの行列の逆行列を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}3&-1\\2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\0&1&3&-1\\-2&0&1&0\\1&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

問題 2. 教科書の命題 2.1 と，問 2.2.1（基本行列に関する諸性質）の証明を完成させよ．

問題 3. A を n 次正方行列とする．

(1) A の n 行めの成分がすべて 0 である場合を考える．

(i) どんな n 次正方行列 B に対しても，AB の n 行目はすべて 0 であることを示せ．

(ii) (i) を用いて，教科書の定理 2.4 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の部分を示せ．（ヒント：PA の n 行目がすべて 0 だから，どんな B に対しても $(PA)B$ の (n,n) 成分は 0 になる）

(2) $\operatorname{rank} A=n$ の場合を考える．QA が階段行列（上三角行列）になるような n 次正方行列 Q を取る．

(i) QA にさらに基本変形 (I), (III) を施すことにより，QA を単位行列 E_n に変形できることを示せ．

(ii) (i) を用いて，教科書の定理 2.4 の (2) $\Longrightarrow$ (3) の部分を示せ．（ヒント：変形 $QA\to E_n$ を表す正則行列を R とし，$P=RQ$ とおく）

問題 4. 前問 (1) の (i) を用いて，教科書の命題 2.5 を証明せよ．

問題 5. 教科書の系 2.6, 命題 2.7 を証明せよ．

問題 6. A,B をそれぞれ m 次，n 次正則行列とするとき，$m+n$ 次正方行列 $C=\begin{pmatrix}A&O_{m,n}\\O_{n,m}&B\end{pmatrix}$ も正則で，逆行列は $C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O_{m,n}\\O_{n,m}&B^{-1}\end{pmatrix}$ であることを示せ．

問題 7. 階数が 0 の行列は零行列に限ることを示せ．

※以下，今までの復習です

問題 8. $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\5\end{pmatrix}$ のなす角を求めよ．

問題 9. 次の行列が逆行列を持たないような定数 a,b の値を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}a&1\\-1&a-2\end{pmatrix}$ (2) $B=\begin{pmatrix}b+1&b\\-1&1\end{pmatrix}$

問題 10. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ (2) $B=\begin{pmatrix}1&1&4\\2&1&2\end{pmatrix}$ (3) $C=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\2&2\end{pmatrix}$ (4) $D=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&3&1\\-1&5&2\end{pmatrix}$

補足. A が n 次正方行列（つまり $n\times n$ 行列）で $\operatorname{rank} A=n$ の場合，今回の問題 3 (2) (i) にあるように，A に基本変形を何度か施して n 次単位行列 E_n に変形することができます．基本変形とは基本行列をかけることであり，基本行列は正則であること，正則行列の積は再び正則であることを合わせると，$PA=E_n$ となる n 次正則行列 P が存在することがわかります．P^{-1} も正則で $((P^{-1})^{-1}=P)$, $P^{-1}P=E_n$ より $A=(P^{-1}P)A=P^{-1}(PA)=P^{-1}$ ですから A も正則になります．まとめると，$n\times n$ 行列 A について

$$\operatorname{rank} A=n \implies A \text{ は正則}$$

です．実は逆も成り立ちます（教科書の定理 2.4 参照）．
上の P は，$P^{-1} = A$ より $P = (P^{-1})^{-1} = A^{-1}$, つまり A の逆行列です．一方で P は変形 $A \xrightarrow{(*)} E_n$ の過程で A に施した変形に対応する行列，言い換えると A に掛けた基本行列すべての積でもあります．$P = PE_n$ とみることにより，E_n に $(*)$ と同じ変形を施すことにより $P = A^{-1}$ が得られる，ということがわかります．このことから，n 次正則行列 A の逆行列は次のように求められることがわかります：

(1) $n \times 2n$ 行列 $\left(A \middle| E_n\right)$ を考える
(2) (1) の行列の「左半分」が E_n になるように基本変形を何度か施す
(3) (2) の結果の「右半分」が A^{-1}

(2) が「変形 $A \to E_n$ と同じ変形を E_n に施す」という部分になっているわけです．この方法は A によってはかなり面倒ではありますが，どんな正則行列にも確実に有効で，手で計算する上ではほとんど唯一の方法かもしれません．

●講義で配布した演習問題の答をここに記します．

(1) $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $B^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $D^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 & -4 \\ 5 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & -2 & 7 & 4 \\ 5 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

もとの行列と積を取って単位行列になっていれば，出た答が正しいことの確認になります．試験のときは必ずやってみるべきでしょう．
くれぐれも慎重に，ゆっくりやることが大切です．工夫次第で多少は計算を簡略化できます．例えば B については，多くの人が最初に 2 行目から 1 行目を引くと思いますが，その次に 2 行目と 3 行目を入れ替えると少し楽になるようです．また C については，最初に 3 行目をいちばん上に移すといいでしょう．