2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 9

担当：境 圭一

問題 1. 次の行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 2. A, B をそれぞれ m 次，n 次正方行列とし，C を $n \times m$ 行列とするとき，$(m+n)$ 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} A & O_{m,n} \\ C & B \end{pmatrix}$ の行列式は $\det X = \det A \det B$ であることを示せ（ヒント：$X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le m+n}$ とおくとき，$i \le m < j$ のとき $x_{ij} = 0$ だから，det の定義に出てくる置換 $\sigma \in S_{m+n}$ のうち，$i \le m \implies \sigma(i) \le m$ をみたすものに対応する項だけが残る）．これを利用して $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

問題 3.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ を，$\mathbf{0}$ でなく互いに平行でもないベクトルとする．このとき $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $|u_1 v_2 - u_2 v_1| = \left| \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \right|$ であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ を，$\mathbf{0}$ でなく互いに平行でもないベクトルとする．このとき $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を 3 辺とする平行六面体の体積は $\left| \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix} \right|$ であることを示せ．

補足．

(1) 行列式の定義式はとても複雑で，n 次正方行列の場合は $n!$ 項の和で与えられます．これを定義通り計算するのは，特に $n \ge 4$ のときは現実的ではなく，今後の講義で計算を簡略化する方法をいろいろ学びます．一方で，例えば今回の問題 2 のように一般の行列について理論的な何か考えるようなときは，定義に立ち返って考える必要が出たりします．

(2) 3 次正方行列の行列式については，定義通りの計算がさほど手間ではなく，**サラスの方法**とよばれる暗記法のようなものがあります．しかし，これは 4 次以上の正方行列について誤った計算法を引き起こす原因になるように思えるので，個人的にはあまり推奨しません．3 次の場合も，今後の講義でやるような簡略化を行うほうが安全だと思います．

(3) 2 次正方行列の行列式についてはすでにやっていて，2 次正方行列が正則であることと，その行列式が 0 でないことが同値でした．実はこのことは一般の n 次正方行列について成立します．その証明が今後の講義の主要なテーマです．

(4) 1 次正方行列については簡単すぎて逆に混乱するかもしれません．1 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ の行列式は $\det A = a$ で，$\det A \neq 0$ のとき，逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ です．なお，$\det A$ を $|A|$ と書かないほうがいいと思う理由の一つはここにあります．$\det A = a$ であり，$|a|$ ではありません．

(5) 今回の問題 3 が示す通り，行列式は幾何学的には面積や体積に対応します．時間があれば，このあたりについてもお話ししたいと思います．なお，$\det A$ を $|A|$ と書かないほうがいいと思う理由はここにもあります．行列式は負の値になることもあり，もし行列式を $|A|$ と書くと，「行列式の絶対値」を書きたいとき $\left||A|\right|$ のように書くことになり，ちょっと変です．