2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 10

担当：境 圭一

問題 1. 次の行列の行列式を計算せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 2. n 次正方行列 A を，n 項縦ベクトルを並べた $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ の形に表す.

(1) $\sigma \in S_n$ とするとき

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{\sigma(1)} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\sigma) \det A$$

であることを示せ.

(2) ある i, j $(i \neq j)$ について $\boldsymbol{a}_j = s\boldsymbol{a}_i$ $(s \in \mathbf{R})$ であるとき，$\det A = 0$ であることを示せ.

(3) ある i, j, k $(i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i)$ について $\boldsymbol{a}_k = s\boldsymbol{a}_i + t\boldsymbol{a}_j$ $(s, t \in \mathbf{R})$ であるとき，$\det A = 0$ であることを示せ.

問題 3. A を n 次正方行列とし，$a \in \mathbf{R}$ とするとき，$\det(aA) = a^n \det A$ であることを示せ.

補足．以前の講義で，連立 1 次方程式を解くために（あるいは rank を計算するために）行列を行基本変形で変形しました．n 次正方行列 A に対し，行基本変形は $\det A$ を求める際にも有効で，

(i) ある行のスカラー倍は行列式も同じだけスカラー倍し，

(ii) 2 つの行の入れ替えは行列式を -1 倍し，

(iii) ある行のスカラー倍を別の行に加えても行列式は変わらない

ということを利用し，うまく行列を変形することで行列式を求めやすくすることができます．注意として，上の (i) と今回の問題 3 を比較してください．

転置行列 ${}^tA$ は i 行目が A の i 列めに等しいような行列でしたが，これについて $\det {}^tA = \det A$ であることを見ました．従って，行列式に関する限りでは，行について成り立つことは列についても成り立ちます（逆も然り）．よって「列基本変形」についても，上の (i), (ii), (iii) と同様のことが成り立ちます．