2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 12

担当：境 圭一

問題 1. 次の行列の行列式を計算せよ．

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & 9 & -10 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -7 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 10 & 3 & -6 & 13 \\ -4 & -3 & 7 & -10 \\ -3 & -2 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の行列の行列式を計算せよ．

$$A := \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ p^2 & q^2 & r^2 & s^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 & s^3 \\ p^4 & q^4 & r^4 & s^4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1^2 & p_2^2 & \cdots & p_n^2 \\ p_1^3 & p_2^3 & \cdots & p_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^n & p_2^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix}$$

補足．余因子展開

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj}$$

は行列式を具体的に計算する上で有効です．i, j は $1 \leq i, j \leq n$ をみたす番号なら何でも構いません．A の第 i 行・第 j 列を除いてできる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} と書くとき

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

です．符号 $(-1)^{i+j}$ を忘れないよう注意してください．

余因子展開を学んだことで，行列式の計算方法はだいたい出揃いました．問題に応じて適切なやり方を選ぶことが求められます．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について考えてみます．$\det A$ の第 3 列に関する余因子展開はほとんどすべてが 0 になってしまって，残るのは

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

です．このように，なるべく 0 が多い行や列に注目して展開すると計算が簡単です．余因子展開を使わず，$(3,3)$ 成分の 1 が $(1,1)$ 成分に来るように行・列の入れ替えをして講義の命題 7.4 または教科書の命題 3.3 を使う手もありますが，それよりは余因子展開のほうが簡単でしょう．余因子 Δ_{33} の計算に出てくる符号 $(-1)^{3+3}$ が，行・列の入れ替えの符号に対応することに注目してください．

一方 B については，すぐに余因子展開してもさほど簡単ではなさそうです．しかし，1 行目を 3, 4 行目から引いても行列式が変わらないことから

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

がわかります．これを 3 列目に関して余因子展開すれば，ちょうど 1 つの 3 次正方行列の行列式だけが残ります．

このように，いろいろな計算手段を臨機応変に組み合わせることで，行列式の計算は非常に簡単になります．これほど簡単になることは，置換を用いていた行列式の定義式からはすぐには想像できないことだと思います．