2018 年度 線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 1 コメント

担当：境 圭一

まず一般に，n 次正方行列 ($n \times n$ 行列) A が正則であるとは，逆行列 A^{-1} が存在することでした．E_n を n 次単位行列とするとき，A^{-1} とは $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ をみたす n 次正方行列のことです．
2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し

$$\det A := ad - bc$$

を A の行列式 (determinant) と呼びます．5/1 の講義で見た通り（あるいは教科書の例 1.4.6 にある通り），次のことが成り立ちます：

(i) A が正則 $\iff \det A \neq 0$

(ii) $\det A \neq 0$ のとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

今回の $A = \begin{pmatrix} 2x+1 & x \\ 4n+2 & 2x+3n \end{pmatrix}$ については $\det A = 4x^2 + 2nx + 3n$ です．上記 (i) によれば，

- 「A が正則でないような x」とは，$4x^2 + 2nx + 3n = 0 \cdots (*)$ をみたす x のこと

です．そのような $x \in \mathbf{R}$（実数）があるか否か，ですから

- $(*)$ の判別式 $D' = n^2 - 12n$ が 0 以上か，0 未満か

を考えればいいことになります．n の定め方から全員 $1 \leq n \leq 11$ のはずですから $D' < 0$ で，従って $(*)$ は実数解を持たず，$\det A = 0$ となる実数 x は存在しません．よって答は全員同じで「A が正則でないような実数 x は存在しない」が正解です．

重要なポイントを過不足なく押さえた答案を書かないといけません．今回は上記 (i) が重要でしょう．「A が正則だと仮定すると $A^{-1} = \cdots$」という答案は，(i) が必要十分条件だということがわかっていないように見えてしまいます．逆に (i) がある程度わかっていそうな答案であれば，例えば n の値を間違えていたとしても 0 点にはしていません．また今回は A^{-1} を求めることは要求されていないので，上記 (ii) は（これ自体は重要ですが）使いません．
また高校数学でよく見る「題意より」「題意がみたされる」という言い回しは，大学では使わないと思ってください．今回の問題では「$x \in \mathbf{R}$ が存在するか？」と問うているだけであり，「題意」は「存在する」「存在しない」のどちらでもありません．出題者が意図した結論に導かれるままに答案を書くのでなく，解答者が自分の意志で論理を組み立てていかないと面白くありません．
単に○と書いてあれば 10 点で，減点されている場合は右下あたりに点数が書いてあります．

読み手に意図を汲んでもらうことを期待してはいけません．例えば今回の問題では，単に式だけを羅列して

$$(2x+1)(2x+3n) - x(4n+2) = 0 \qquad 4x^2 + 2nx + 3n = 0 \qquad D = 4n^2 - 48n < 0$$

のように書いている人もいるのですが，これでは $4x^2 + 2nx + 3n = 0$ と仮定しているのか，$4x^2 + 2nx + 3n = 0$ が成り立つと主張しているのか，読み手が推測しないと判断がつきません．きちんと

> $(2x+1)(2x+3n) - x(4n+2) = 0$,　つまり　$4x^2 + 2nx + 3n = 0 \cdots (*)$　の判別式は　$D = 4n^2 - 48n < 0$
> だから，$(*)$ は実数解を持たない

のように，話の流れがわかるように書かなければなりません．今回のレポートでは採点者が出題者でもあるので，言葉足らずな答案でも何をしたいか何となく察してしまいますが，世の中一般ではそうではありません．しっかり説明しようという意図が伝わらない文章は「意味がわからない」と切り捨てられておしまいです．例えば就職活動などをするときに急にがんばろうと思っても，日頃から訓練していなければ無理です．

この講義に限らず，レポートは文章を書く力を鍛える貴重な機会ですから，しっかり考えて書くべきです．他の人のレポートの丸写しは，貴重な機会を無にしているだけでなく，採点者から見れば丸写しであることは一目瞭然ですから，極めて悪い心証を与えます．ただし，友人や教員と解き方を議論することはむしろ推奨されることです．そのあたりの線引きは難しく，採点する側としては悩ましいところです．議論して解決方法がわかったら，レポートにまとめる段階では各自の責任で文章を考える，というふうにしてもらいたいと思います．

注意を 3 つ述べておきます．

- 講義でやったことは，適切に引用して構いません．例えば今回の問題では，上記 (i), (ii) は講義でやりましたから，改めて書く必要はありません．
- 一般に $n \times n$ 行列 A に対しても $\det A$ は定義され（具体的な形は今後学びます），(i) と同じことが成り立ちます．
- 教科書では $\det A$ のことを $|A|$ と書いていますが，この講義では $\det A$ と書くことにします．行列式は負の値になることもありますが，$|A|$ だと 0 以上の値と誤解することがあるからです．