線形代数学 **I**（生物学コース・物質循環学コース）中間試験（**2018** 年 **5** 月 **29** 日）解答・解説

担当：境 圭一

解答.

1. (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{3\pi}{4}$

2. (1) $a = -\dfrac{1}{2}$ (2) $b = 1, 4$

3. (1) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $D^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. (1) $\operatorname{rank} P = 3$ (2) $\operatorname{rank} Q = 2$

5. (1) $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & -1/20 & 1/30 \\ -1/4 & 1/6 & 3/20 & 1/15 \\ 1/4 & -1/6 & 1/20 & 2/15 \\ -1/4 & 0 & -3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$

   (2) $Y^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|^2} & \dfrac{\boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_2|^2} & \cdots & \dfrac{\boldsymbol{u}_n}{|\boldsymbol{u}_n|^2} \end{pmatrix}$

解説.

1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角 $\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で定義され，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ をみたす．それぞれ $90°, 135°$ でも正解.

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つことと $ad - bc \neq 0$ は同値で，$ad - bc \neq 0$ なら逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ だった．(1) は $2a + 1 = 0$, (2) は $(b+4)(b+3) - 4(3b+2) = 0$ をみたすとき逆行列を持たない.

3. (1) は前問で述べた通り．(2) は $3 \times 6$ 行列 $\left(D \,\middle|\, E_3\right)$ を基本変形して左半分が $E_3$ になったときに右半分に残った行列である．$\dfrac{1}{9}$ が行列の中に入っていても正解（だが，上のように書いたほうが見やすいだろう）.

4. 行基本変形で階段行列に変形したときに残るゼロでない行の数が階数 (rank) だった.

5. $Y$ の逆行列 $Z = Y^{-1}$ があるとして，$Z$ を縦ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を並べて $Z = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ と表すことにすると，積 $YZ$ の $(i, j)$ 成分は内積 $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$ だった．$YZ = E_n$ になっているはずだから，$i = 1, \ldots, n$ に対し $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 1 \cdots (a)$, また $i \neq j$ のとき $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0 \cdots (b)$ でなければならない．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の条件と (b) より，$\boldsymbol{v}_i$ としては $\boldsymbol{v}_i = k_i \boldsymbol{u}_i$ $(k_i \in \mathbf{R})$ の形であればよさそうで，$k_i = \dfrac{1}{|\boldsymbol{u}_i|^2}$ とすれば (a) もみたされることがわかる．$\boldsymbol{u}_i \neq \mathbf{0}$ より $|\boldsymbol{u}_i| \neq 0$ だから，分母に $|\boldsymbol{u}_i|$ があるのは差し支えない．教科書 39 ページの系 2.6 により，$ZY = E_n$ であることの確認は必要ない.
   (1) が (2) のヒントになっているとも言えるし，先に (2) ができれば（難しいが），(1) は煩わしい計算をしなくて済む.

問題 4 までは慎重に計算すればできるはずだし，また問題 3 は検算もできるので，確実にできてほしい．5. (1) は少し大変かもしれないが，工夫次第で見かけよりは苦労なくできる.
5. (2) は行列の積や逆行列への多少の慣れがないと難しいかもしれない．実は 5. (2) は**直交行列**の逆行列と関係がある．直交行列については時間があれば後期の「線形代数学 II」で扱う．上で $ZY = E_n$ であることの確認は必要ないと述べたが，よく考えるとこれは不思議なことである.

配点：10, 10, 10, 10, 10（各小問につき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear1/18_linear1.html