線形代数学 I（生物学コース・物質循環学コース）期末試験（2018 年 7 月 31 日）解答・解説

担当：境 圭一

解答.

1. (1) $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -1$ (2) $\mathrm{sgn}(\sigma_2) = 1$
2. (1) $\sqrt{3}$ (2) 9
3. (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 1/10 & 1/5 & -1/10 \\ 2/15 & 1/15 & -1/5 & -1/15 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (2) なし
4. (1) $\det(P_1Q_1R_1) = -3$ (2) $\det(P_2Q_2R_2) = -27$
5. (1) m を自然数とするとき，$X^{4m-3} = X$, $X^{4m-2} = -E_4$, $X^{4m-1} = -X$, $X^{4m} = E_4$
   (2) n が偶数のとき $|\det Y| = 2^{n/2}$, n が奇数のとき Y は存在しない

解説.

1. σ_1 は互換 τ_{12} だから符号は -1. $\sigma_2 = \tau_{13}\tau_{24}$ だから符号は $+1$.
2. それぞれ $\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}\right|$ と $\left|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\right|$ に等しい．面積や体積は正の値だから絶対値が必要である.
3. $\det A = -30$ だから A^{-1} は存在する．実際に計算するには，余因子行列を求めるよりは中間試験の前にやった方法のほうが早いだろう．実は中間試験の問題 5 を適用できる形になっている．$\det B = 0$ だから B^{-1} は存在しない.
4. 行列の積 $P_kQ_kR_k$ を求めてから det を計算してもよいし，$\det P_k \det Q_k \det R_k$ を計算してもよい．(1) は前者が，(2) は後者が簡単だろう．R_1 に P_1Q_1 を左からかけるのは行基本変形をすることになっていて，結果は行列式を計算しやすい形になっている．(2) は余因子展開が最も簡単になると思われる方法で基本変形をしておくと，実は (1) の計算を再利用できる形になっている.
5. (1) について，定義通り計算すると $X^2 = -E_4$ であることがすぐにわかる．これを繰り返し使うと
   $$X^3 = X^2X = -E_4X = -X, \quad X^4 = X^3X = (-X)X = -X^2 = -(-E_4) = E_4, \quad X^5 = X^4X = E_4X = X, \quad \ldots$$
   となるから，4 乗ごとに同じ結果になることがわかる.
   (2) について，$Y^2 = -2E_n$ となる Y があるとすると，$\det(AB) = \det A \det B$ を $A = B = Y$ の場合に適用して
   $$(\det Y)^2 = \det(Y^2) = \det(-2E_n) = (-2)^n \det E_n = (-2)^n$$
   でなければならない．$-2E_n$ は n 個の行がすべて -2 倍されているので，それらが 1 つずつ det の前に出て $(-2)^n$ が出ることになる．Y の成分がすべて実数であることと $\det Y$ の定義から $\det Y$ も実数で，従って $(\det Y)^2 \geq 0$, つまり $(-2)^n \geq 0$ でなければならない．よって n は偶数でなければならない．対偶を取れば，n が奇数のときは Y は存在しないことがわかる．n が偶数のときは，$n = 2m$ とおくと，例えば
   $$Y = \sqrt{2}\begin{pmatrix} O & -E_m \\ E_m & O \end{pmatrix}$$
   が $Y^2 = -2E_n$ をみたす Y の例になる（確かめよ）．このときは $(\det Y)^2 = (-2)^n = 2^n$ だから $|\det Y| = 2^{n/2}$.

問題 4 までは慎重に計算すればできるはずである．問題 5 も見た目に惑わされなければ，実はさほど難しくはない．(2) は $n = 1$ の場合は $y^2 = -2$ という方程式になっていて実数解は存在しないが，行列であれば対応する「方程式」が実数行列の範囲に解を持つことがある，という例になっている．n が偶数の場合の Y の存在は (1) がヒントになっている．$\det Y$ の正負も考察すべきだが，それはこの講義の範囲を超えると思われるので，絶対値だけ問うこととした.

配点：10, 10, 10, 10, 10（各小問につき 5 点，50 点満点）

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_linear1/18_linear1.html