2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 2

担当 : 境 圭一

1. 以下に挙げる，ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の部分集合 W_i について，それらは $\mathbf{R}^n$ の部分空間かどうか答えよ．
   (1) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + y = 0\}$
   (2) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$
   (3) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$
   (4) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2y = -z\}$
   (5) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
   (6) $W_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 4z = 0\}$
2. 次の $\mathbf{R}^3$ の部分空間について，和空間 $W_1 + W_2$ は直和かどうか答えよ．
   (1) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$,　$W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$,　ただし　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (2) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$,　$W_2 = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$,　ただし　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
3. V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間 ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ を $\mathbf{0}$ でないベクトルとする．$\boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ のとき，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であることを示せ．

補足.

(i) 問題 1 で $\mathbf{R}^n$ の部分空間になっているのは W_1, W_4, W_6 です．証明としては，それぞれが和とスカラー倍で閉じているかどうかを確認するわけです．イメージとしては，$\mathbf{K}^n$ の部分空間とは，直線や平面のような「まっすぐな部分集合」で，原点を通るものです．$W_1, \ldots, W_6$ を図示してみて，そのことを確かめてみてください．「まっすぐな」とは「(定数項を含まない) 1 次式で表せる」ということで，線形代数 (linear algebra) の名前の由来です．

(ii) ベクトル空間 V の部分空間 W_1, W_2 が $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ をみたすとき，和空間 $W_1 + W_2$ を $W_1 \oplus W_2$ で表し，**直和**と呼びました．ベクトル空間は必ずゼロベクトルを含みますから，共通部分 $W_1 \cap W_2$ も少なくとも $\mathbf{0}$ を含みます．$W_1 + W_2$ が直和であることの定義は，この共通部分が最小であること，とも言えます．

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, つまり $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ のとき，$W_1 \oplus W_2$ のベクトルは $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ ($\boldsymbol{w}_k \in W_k$, $k = 1, 2$) の形に**一意に**表せるのでした．$W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ の場合はそうはいきません．講義でやった例 2.2 (3) の場合，例えば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \in W_1 + W_2$ について考えると，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + (-\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$ のように，W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和として表す方法が複数あります．$W_1 \cap W_2$ の $\mathbf{0}$ でないベクトルを足したり引いたりすれば，このようなことはいくらでもできてしまうわけです．直和になっている場合は，こういったムダが生じません．

問題 2 について考えるために，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の 1 次結合で表されるベクトル全体の集合であることを思い出しましょう．例えば (1) なら

$$W_1 = \{r\boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^3 \mid r, s \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} r+s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; r, s \in \mathbf{R} \right\}$$

です．$r + s$ と s は独立に変化できますから，W_1 は z 成分が 0 のベクトル全体の集合ということになります．すなわち，(1) の W_1 は $\mathbf{R}^3$ の中の xy 平面のことです．

また (1) の W_2 は「$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表されるベクトル全体」です．単一のベクトルの 1 次結合というのはわかりにくいかもしれませんが,

$$W_2 = \{r\boldsymbol{v}_3 \in \mathbf{R}^3 \mid r \in \mathbf{R}\} = \left\{ r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; r \in \mathbf{R} \right\}$$

です．原点を通り $\boldsymbol{v}_3$ に平行な直線を表します．

(iii) 問題 3 のヒントを述べます．$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ は $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ $(a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{K}) \cdots (*)$ の形に表せるベクトル全体，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbf{K}) \cdots (**)$ の形に表せるベクトル全体のなすベクトル空間です．(**) は (*) で

$a_3 = 0$ の場合ですから，(**) は (*) の一種です．これは

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \supset \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \tag{a}$$

を意味します．もし逆の包含関係

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \subset \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, \tag{b}$$

つまり (*) は (**) の一種であることを証明できれば，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であることがわかります．(a) は無条件で成立するのに対し，(b) はもちろん一般的には不成立ですが，$\boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ という条件があると成立します．整理して考えるのは難しいかもしれませんが，こういう問題を**時間をかけて**考えるのは良い訓練になります．