2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 3

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の $\mathbf{R}^3$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．
   (1) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)$
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1,0),\quad \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)$
   (3) $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1,0,-1),\quad \boldsymbol{v}_3 = (0,-1,-2)$
2. （教科書 p. 105, 命題 4.7 参照）．$\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,1,3,0), \boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,4), \boldsymbol{v}_4 = (1,0,-4,8) \in \mathbf{R}^4$ とおく．
   (1) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属であることを示せ．
   (3) $\boldsymbol{v}_4$ を $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せ．その表し方はただ一通りであることを示せ．
3. $\boldsymbol{u}_1 = (1,1),\quad \boldsymbol{u}_2 = (-1,3),\quad \boldsymbol{v}_1 = (0,1),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2,-1) \in \mathbf{R}^2$ とおく．
   (1) $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．また $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ も $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{v}_j = a_{1,j}\boldsymbol{u}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{u}_2$ となる $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ $(i,j = 1,2)$ を求めよ．
   (3) $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ を縦ベクトルに書き換えたとき，2×2 行列の等式 $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)A$ を確認せよ．
   (4) A は正則であることを示せ．
   (5) $\boldsymbol{u}_j = b_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + b_{2,j}\boldsymbol{v}_2$ $(j = 1,2)$ となる $b_{i,j} \in \mathbf{R}$ を求めよ．これらと A^{-1} の関係を考察せよ．
4. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする．$\mathbf{K}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{K}^n$ の基底であることを示せ（下の補足参照）．
5. V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とする．$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k \in V$ が 1 次独立であるとき，$i = 1,\dots,k$ に対し $\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$ であることを示せ．
   （ヒント：対偶を考え，ある $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属であることを示すとよい）

補足．

(i) ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が与えられたとします（講義の定義 3.5 参照）．このとき，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{v}_i = r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_n$ $(r_1,\dots,r_n \in \mathbf{K})$ の形に**一意的**に表せるのでした（講義の補題 3.7 参照）．よってこの $\boldsymbol{x}$ は，n 個のスカラーの組 $(r_1,\dots,r_n)$ で完全に特定されることになります．この組 $(r_1,\dots,r_n)$ を，**基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{x}$ の成分**と呼びます．

$V = \mathbf{K}^n$ の場合を考えてみます．次の (1), (2) より，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{K}^n$ の基底です：

(1) $\sum_{i=1}^{n} r_i\boldsymbol{e}_i = \mathbf{0}$ と仮定すると 左辺 $= (r_1,\dots,r_n) = \mathbf{0}$ だから，$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立

(2) $\mathbf{K}^n$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n)$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$ の形に表せる

(2) より，基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ に関する $\boldsymbol{x}$ の成分とは，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n$ の**座標**に他なりません．逆に言うと，一般のベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{x} \in V$ の成分とは，$\mathbf{K}^n$ の「座標」を抽象化した概念です．ベクトル空間は $\mathbf{K}^n$ の性質（和・スカラー倍）を座標によらない形で抽象化したものでしたが，基底を 1 つ選べば，それに関する「座標」が 1 つ定まることになります．ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性は，各 $\boldsymbol{x} \in V$ の「座標」がただ 1 通りに定まることを保証する性質だということがわかります．

(ii) V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を 1 つ取り固定します．このとき，この基底に関する $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ の成分がそれぞれ $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)$ だとすると，$r,s \in \mathbf{K}$ に対し，この基底に関する $r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}$ の成分は $(ra_1 + sb_1,\dots,ra_n + sb_n)$ となることがすぐにわかります（確かめてください）．つまり，基底を 1 つ固定し，各ベクトルを基底に関する成分で表すことにすると，V の和やスカラー倍は $\mathbf{K}^n$ のそれらと全く同一になります．この意味で，**基底を 1 つ固定すると，V は $\mathbf{K}^n$ と「同一視」されます**．詳しい意味は講義の後半でお話しします．

(iii) ベクトル空間 V の基底の取り方は一般に一意的ではありません．例えば今回の問題 3 で見るように，$\mathbf{K}^n$ の基底となるベクトルの組は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の他にもあります．特別な理由がない限り「最も標準的な基底」

というものはなく，どの基底にも優劣はありません.「座標」の取り方はいろいろあり，それらの間に優劣はない，ということです.

(iv) 1 次独立性を理解するには，逆に 1 次従属性を理解するのも 1 つの手です.「1 次独立でない」ということを言い換えると次のようになります：

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \text{ が 1 次従属} \iff \sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \text{ かつ } (r_1, \ldots, r_n) \neq (0, \ldots, 0) \text{ となる } r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{K} \text{ が存在する}$$

例えば $n = 3$ で $\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \cdots (*)$ となっているとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属です．このとき $\boldsymbol{v}_1 = -2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$ となり，$\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を使って表せてしまいますから，以降 $\boldsymbol{v}_1$ は全く使わなくてよいことになります．このように「1 次従属な組にはムダがある」ということができます．$(*)$ のように互いを決めるような関係がなく，それぞれが独立したベクトルになっているような組が「1 次独立なベクトル」ということになります.