

※提出の必要はありません。レポート問題は別途出題しています。

※スペース節約のため、ベクトルを横に書きます。縦で書き直した方が計算しやすいと思います。

1. 次のベクトルの組は  $\mathbf{R}^4$  の基底か?

(1)  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$

(2)  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, -1, 0)$

(3)  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 4, 8)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 9, 27)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, -4, 16, 64)$

2.  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  とする。

(1)  $i = 1, 2, 3$  に対し,  $\text{rank } A_i$  を求めよ。

(2)  $V_i := \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A_i \mathbf{u} = \mathbf{0}\}$  とおく。  $V_i$  は  $\mathbf{R}$  ベクトル空間であることを示せ。(教科書 p. 99, 例 4.1.5 (4) 参照)

(3)  $\dim V_i$  を求めよ。

3.  $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 4, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 3, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0, -1, -2) \in \mathbf{R}^4$  とし,  $W_1 := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ ,  $W_2 := \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle \subset \mathbf{R}^4$  とおく。

(1)  $\dim W_1, \dim W_2$  を求めよ。

(2)  $\dim(W_1 \cap W_2)$  を求めよ。

(3)  $\dim(W_1 + W_2)$  を求めよ。

補足.

(i) ベクトル空間  $V$  の次元  $\dim V$  とは,  $V$  の基底がいくつのベクトルの組からなるか, という数ですが, 講義の系 4.7 より, どれくらいたくさんのベクトルが  $V$  の中で 1 次独立になれるか, という値でもあります. 感覚的には, 空間の「広さ」のようなものを表す値です. 一般に  $\dim \mathbf{K}^n = n$  であることを見ましたから, 例えば数直線で表される  $\mathbf{R}^1$  の次元は 1,  $xy$  平面で表される  $\mathbf{R}^2$  の次元は 2,  $xyz$  空間で表される  $\mathbf{R}^3$  の次元は 3, といった具合に, 日常的な意味での「次元」と合う概念です.

(ii) 上で述べたように  $n = \dim V$  は  $V$  の 1 次独立なベクトルの最大個数ですが, その最大個数からなる 1 次独立な  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  は必ず基底になります (講義の命題 4.6, 系 4.7). 問題 1 は  $V = \mathbf{R}^4$  の場合で,  $\dim \mathbf{R}^4 = 4$  であることはわかっていますから, 1 次独立なベクトルの最大個数は 4 です. よって  $\mathbf{R}^4$  の 4 つのベクトル  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$  は, 1 次独立であれば基底であり, 1 次独立でなければ基底ではないことになります.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$  を縦ベクトルに書き直して  $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4)$  という  $4 \times 4$  行列を考えると,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$  が 1 次独立  $\iff \text{rank } A = 4 \iff \det A \neq 0$  です.

(iii) 講義の補題 4.1 を証明するときに使った

$$(\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n) = (\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_m) C \quad \cdots (*)$$

(教科書 p. 108 も参照) という書き方は誤解を招くかもしれません.  $C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  のとき, (\*) の右辺は

$$\left( \sum_{k=1}^m c_{k1} \mathbf{b}_k \quad \sum_{k=1}^m c_{k2} \mathbf{b}_k \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^m c_{kn} \mathbf{b}_k \right) \quad \cdots (**)$$

を略記したものです. つまり (\*) は,  $n$  個の等式  $\mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^m c_{kj} \mathbf{b}_k$  ( $j = 1, \dots, n$ ) をまとめて略記したものです. 気持ちとしては, 各  $\mathbf{b}_k$  をあたかも単独のスカラーのように考えて, (\*) の右辺を「 $1 \times m$  行列」と  $m \times n$  行列の積のようにみなして計算すれば (\*\*) になる, ということです.

考えているベクトル空間が  $V = \mathbf{K}^n$  で, 各  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$  が縦ベクトルで書かれていれば, 等式 (\*) は行列の間の等式として意味があります. つまり (\*) の右辺の行列の積を計算すれば, 行列 (\*\*) に一致します. 演習問題 3 の問題 3 も参照してください.

(iv) この講義に出てくるベクトル空間  $V$  は、有限個からなる基底  $v_1, \dots, v_n$  ( $n = \dim V$ ) を持つと仮定します。そうでないベクトル空間の例としては、 $x$  の多項式全体からなるベクトル空間  $\mathbf{K}[x]$  があります（演習問題 1 の問題 3 参照）。任意に選んだ有限個の「ベクトル」  $f_1, \dots, f_k \in \mathbf{K}[x]$ （各  $f_i$  は  $x$  の多項式）に対し、 $f_1, \dots, f_k$  の次数の最大値を  $m$  とするとき、例えば  $x^{m+1} \in \mathbf{K}[x]$  は  $r_1 f_1 + \dots + r_k f_k$  ( $r_1, \dots, r_k \in \mathbf{K}$ ) の形には決して表せませんから（次数を考えればわかる）、 $f_1, \dots, f_k$  は基底の定義 3.5 の (2) をみたくしません。よって有限個のベクトルは決して  $\mathbf{K}[x]$  の基底にはなり得ません。無限個のベクトルの組  $1, x, x^2, \dots$  は「基底」とよぶべきものではありませんが、無限個のベクトルの 1 次独立性は微妙な問題を含みます（無限和  $r_0 \cdot 1 + r_1 \cdot x + r_2 \cdot x^2 + \dots$  の意味が定かでない）。「無限次元ベクトル空間」は慎重に扱わないといけません。もっとも、上で述べたように、この講義ではそのようなベクトル空間は扱いません。