2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 5

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 2, -3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (4, 1, -1, 2) \in \mathbf{R}^4$ とする．
   (1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立であることを示せ．$W := \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ とおくとき，$\dim W = 2$ であることを示せ．（問題 2. (1) も参照）
   (2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の両方と直交するベクトル $\boldsymbol{u}_3 \in \mathbf{R}^4$ を 1 つ求めよ．
   (3) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ のいずれとも直交するベクトル $\boldsymbol{u}_4 \in \mathbf{R}^4$ を 1 つ求めよ．
   (4) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbf{R}^4$ の基底であることを示せ．
2. (1) 一般に，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が 1 次独立であるとき，$W := \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ とおくと，$\dim W = k$ であることを示せ．
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, -2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, -3)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 1, 0, -3)$, $\boldsymbol{v}_5 = (-2, 0, 1, -1) \in \mathbf{R}^4$ とおく．教科書 112 ページの問 4.2.7 の W_1, W_2 について，$W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $W_2 = \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle$ であることを示せ．
   (3) $\dim W_1 = 3, \dim W_2 = 2$ であることを示せ．
   (4) $W_2 \subset W_1$ であることを示せ．これにより $W_1 \cap W_2 = W_2$ であることを示せ．
   (5) $\dim(W_1 + W_2) = 3$ であることを示せ．
3. $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間

$$W_1 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}, \quad W_2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0,\ 2x - z = 0\}$$

   を考える．前問を参考に，$\dim W_1, \dim W_2, \dim(W_1 \cap W_2), \dim(W_1 + W_2)$ を求めよ．$W_1 + W_2$ は直和か？

補足．

(i) 講義の定理 4.9 から，問題 1 のような $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{R}^4$ が与えられたとき，$\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \in \mathbf{R}^4$ をうまく選んで付け足すことで $\mathbf{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ を作ることができます．しかし定理 4.9 は $\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ の見つけ方まで教えてくれるわけではありません．問題 1 は，$\mathbf{R}^4$ の**ユークリッド内積**を利用して，その方法の 1 つを具体的に与えたものです．ユークリッド内積は $\mathbf{R}^n$ の座標を（つまり，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を）使って定義されるものであり，一般のベクトル空間 V にはそのようなものはないので，問題 1 の方法は（ひとまずは）$V = \mathbf{R}^n$ のときしか使えない方法です．一般の V 上の内積については，次回以降の講義で論じます．

(ii) 問題 2. (1) は，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が W の基底であることを示すとよいでしょう．

(2) の $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_5$ を上のように与えた理由は次の通りです：W_1 の条件式から $w = -x - 2y - 3z$ であることを使うと，W_1 のベクトルはすべて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x - 2y - 3z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 \quad (x, y, z \in \mathbf{R})$$

の形になるはずです．つまり条件式を使って文字を減らしたわけです．これは $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ を意味します．W_2 についても同様です．文字の減らし方は人それぞれなので，他のベクトルを使って W_1, W_2 を表示することもできます．例えば $x = -2y - 3z - w$ を使って x を消去した人は，$\boldsymbol{u}_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-3, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_1 = (-1, 0, 0, 1)$ に対し $W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ という表し方を得るはずです．

(4) を示すには，$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_5 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$ であることを使うとよいでしょう．この問題で $W_2 \subset W_1$ となったのは偶然で，一般的には $W_2 \not\subset W_1, W_1 \not\subset W_2$ です．その場合は $W_1 \cap W_2$ は W_1, W_2 の両方の条件をみたす (x, y, z, w) 全体の集合です．その条件を使って文字を減らすことで，上と同様に $W_1 \cap W_2$ を求められます．

(5) は講義でやった命題 4.10 を使います．この問題の場合は $\dim(W_1 + W_2) < \dim \mathbf{R}^4$ なので，$W_1 + W_2 \subsetneq \mathbf{R}^4$ です．また $\dim(W_1 + W_2) \neq \dim W_1 + \dim W_2$ なので，講義でやった系 4.11 により，$W_1 + W_2$ は直和でないこともわかります．