2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 7

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots\}$ は V の基底であることを示せ．また $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots\}$ への基底の変換行列 P を求めよ．
   (1) $V = \mathbf{R}^4$, $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 2, -3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (4, 1, -1, 2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (1, 2, 1, 0)$,
   $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, -1, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5, 0, 3, 1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 2, -1, -3)$
   (2) $V = \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}_k = k\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{e}_{n-k}$ $(1 \le k \le n)$. ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の標準基底．
2. 問題 1. (1), (2) それぞれについて，各 $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j$ を縦ベクトルで書いて $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$ とおくとき，行列の等式 $A = BP$ を確認せよ．
3. V を内積空間とする．基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ から Gram-Schmidt の直交化法で得られた正規直交基底を $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ とするとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ への基底の変換行列を $c_{kj} := \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{u}_j$ を用いて表せ．

（以下，今までの復習です）

4. 次の集合は $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間かどうか答えよ．
   (1) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0,\ 2y - z = 0\}$
   (2) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - z = 1\}$
5. 次のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．
   (1) $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1, -3, 1) \in \mathbf{R}^3$
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, 5, 6)$, $\boldsymbol{v}_3 = (7, 8, 9)$, $\boldsymbol{v}_4 = (10, 11, 12) \in \mathbf{R}^3$
   (3) $\boldsymbol{w}_1 = (0, 2, -4, 1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1, -1, -1, 0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1, 3, 1, -2)$, $\boldsymbol{w}_4 = (2, 4, -4, 1) \in \mathbf{R}^4$
6. 次の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots$ を求めよ．
   (1) $\boldsymbol{v}_1 = (3, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 3) \in \mathbf{R}^2$
   (2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, -3, 5) \in \mathbf{R}^3$
   (3) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -4, 1, -3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5, -2, 2, -9) \in \mathbf{R}^4$
7. $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, 1, 9) \in \mathbf{R}^3$ とする．
   (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立かどうか調べよ．また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立かどうか調べよ．
   (2) $W := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \subset \mathbf{R}^3$ とおく．$\dim W = 2$ であることを示せ．
8. (1) 図 1 左の状況で，$\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{u}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{v}_2$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{u}'_2$ とおく．$\boldsymbol{u}'_2$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2$ を用いて表せ．
   ヒント：OA_1 と A_2B が平行だから $\overrightarrow{A_2B} = k\boldsymbol{u}_1$ とおけるので $\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{u}_1$. $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}'_2 = 0$ から k が求まる．
   (2) 図 1 右の状況で，$\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{u}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{u}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \boldsymbol{v}_3$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{u}'_3$ とおく．$\boldsymbol{u}'_3$ を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3$ を用いて表せ．
   ヒント：A_3B が $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ で定まる平面と平行だから $\overrightarrow{A_3B} = k\boldsymbol{u}_1 + l\boldsymbol{u}_2$ とおけるので $\boldsymbol{u}'_3 = \boldsymbol{v}_3 + k\boldsymbol{u}_1 + l\boldsymbol{u}_2$. $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}'_3 = 0$ と $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}'_3 = 0$ から k, l が求まる．$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ も使う．
   (3) (1), (2) の結果と Gram-Schmidt の直交化法を見比べよ．

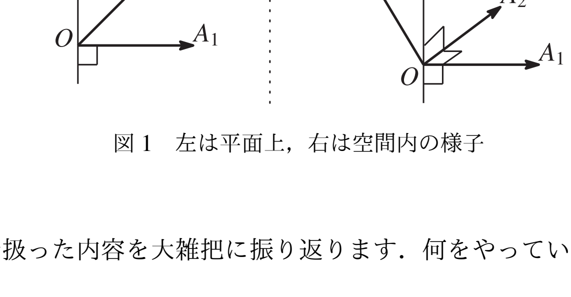

図 1　左は平面上，右は空間内の様子

補足． 以下，ここまでの講義で扱った内容を大雑把に振り返ります．何をやっていたか，ある程度イメージがわいて

くるでしょうか．イメージがわかなければ，その箇所をもう一度時間をかけて復習するといいでしょう．イメージがわいたとしても，いざ具体的な問題が与えられたときに何を計算したらよいかを判断するには，もう一段階の訓練が必要ではないかと思います．今までの演習問題をよく見返して，具体的な計算の中に抽象的な議論がどう生かされているか，考えてみてください．

(i) ベクトル空間の定義．$\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ 上定まっていたベクトルの和やスカラー倍の性質を，座標によらない形で抽象化したのがベクトル空間でした．
(ii) 部分ベクトル空間の定義．ベクトル空間 V の部分集合で，V の和やスカラー倍で閉じているもののことでした．$V = \mathbf{K}^n$ の場合は，大雑把には「定数項が 0 の（連立）1 次方程式で表される部分集合」が部分ベクトル空間です．
(iii) 基底 (basis) の定義．1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ で，$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = V$ となっているもののことでした．1 次独立性の定義や記号の意味を思い出せるでしょうか．基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ があると，V のすべてのベクトルは $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で一意的に表せます．この意味で，基底とは座標軸のようなものです．一般に，基底の取り方はいろいろあります．
(iv) 次元の定義．V の基底がいくつのベクトルからなるか，という数を $\dim V$ と定義しました．$n = \dim V$ とするとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が 1 次独立なら，これらは V の基底になります．
(v) 内積空間の定義．各 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}$ が定まり，$\mathbf{R}^n$ 上の Euclid 内積と同じ性質をみたすとき，V を内積空間と呼びました．内積空間の基底があると，Gram-Schmidt の直交化法により正規直交基底を作ることができます．なぜ Gram-Schmidt の直交化法で正規直交系が得られるかは，今回の問題 8 を見ると納得できるかもしれません．
(vi) 基底変換について．一般的に基底の取り方はいろいろありますが，それらは正則行列により互いに移りあうことを見ました．

(i) より，すべてのことは $\mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ 上で成り立つことの抽象化です．まずは $V = \mathbf{R}^n$ または $\mathbf{C}^n$ の場合を考えてみるのが近道かもしれません．