

※スペース節約のため, 問題 1, 2 ではベクトルを横に書きます. 縦で書き直した方が計算しやすいと思います.

1. 次の写像は線形であることを示せ. それぞれの核 (kernel) と像 (image) を求めよ.

$$(1) f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = -x + 2y$$

$$(2) g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad g(x) = (3x, 2x)$$

$$(3) h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad h(x, y) = (x + y, x - y)$$

2. 次の写像は線形ではないことを示せ.

$$(1) f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = x^2 + 2y$$

$$(2) g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad g(x) = (x + 1, 2x)$$

$$(3) h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(x) = \log(x^2 + 1)$$

3. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または \mathbf{C} とする.

(1) $f: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ を線形写像とする. $f(1) = a$ とおき, 各 $x \in \mathbf{K}$ を $x = x \cdot 1$ と見ることにより, $f(x) = ax$ であることを示せ.

(2) $g: \mathbf{K}^2 \rightarrow \mathbf{K}^2$ を線形写像とする. $g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1, g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2 \in \mathbf{K}^2$ (縦ベクトル) とおき, 2×2 行列 $A := (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2)$ を考える. 各 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ に対し, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ と見ることにより, $g(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ であることを示せ.

(3) $h: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ を線形写像とする. $1 \leq k \leq n$ に対し $\mathbf{v}_k := h(\mathbf{e}_k) \in \mathbf{K}^m$ とおき, $m \times n$ 行列 $A = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n)$ を考える. 全ての $\mathbf{u} \in \mathbf{K}^n$ に対し $h(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ となることを示せ.

4. 実数を係数とする x の多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbf{R}[x]$ と書く. 写像 $I: \mathbf{R}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ を $I(f) := \int_0^1 f(x) dx$ で定義する. I は線形写像であることを示せ.

補足.

(i) 集合 A, B の間の写像 (map) $f: A \rightarrow B$ とは, 各 $a \in A$ に対し $f(a) \in B$ がちょうど 1 つ定まる対応をいいます. A を f の定義域, B を f の値域とよびます. $a \in A$ に対し $f(a) \in B$ が対応することを, $f: a \mapsto f(a) \in B$ のように書くこともあります. 典型的な例は $f(x) = x^2 + 1$ や $g(x) = \sin x$ といった関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ で, これらは各 $x \in \mathbf{R}$ に $f(x) \in \mathbf{R}$ がちょうど 1 つ対応しています. 一方, $A = \{\text{信大生}\}, B = \{\text{講義科目}\}$ という集合を考え, $x \in A$ に対し $f(x) := (x \text{ の好きな科目})$ という対応を考えようとする, 多くの $x \in A$ に対し $f(x)$ はちょうど 1 つには定まらないと思うので, f は写像ではないと思います. なるべくたくさん定まってほしいものです.

(ii) $f(x) := \sqrt{x}$ という関数は, $x \geq 0$ に対してのみ意味を持ちますから, この f の定義域は $\mathbf{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ です. $\sqrt{x} \geq 0$ ですから値域も $\mathbf{R}_{\geq 0}$ で, 従って $f: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ です. 一方, $f(x) \in \mathbf{R}$ と書いても間違いではありませんから, $f: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}$ ともみなせます. 一般に, 写像 $f: A \rightarrow B$ について, もし $B \subset C$ であれば, $f: A \rightarrow C$ ともみなせます. このように, $f(x)$ をどの集合の要素と見るかによって f の値域は変わります. 定義域については, $f(x) = \sqrt{x}$ を見るとわかるように, あまり安易に変えてはいけません.

(iii) ベクトル空間 V, W について, 写像 $f: V \rightarrow W$ が線形 (linear) であるとは, 各 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ と $r, s \in \mathbf{K}$ に対し

$$f(r\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = rf(\mathbf{u}) + sf(\mathbf{v})$$

が成立することです. 左辺の和やスカラー倍は V のもの, 右辺の和やスカラー倍は W のものです. 線形写像の条件は, f が和やスカラー倍の構造を保つことである, と言えます. そのような写像は実はあまり多くなく, 問題 3 が示すように, $V = \mathbf{K}^n, W = \mathbf{K}^m$ の場合は, すべての線形写像 $f: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ は, 何らかの $m \times n$ 行列 A により $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ と表されます. 実は今後の講義で見ると, 一般のベクトル空間 V, W の場合も, 線形写像 $V \rightarrow W$ は本質的に行列をかける形に限られます. この意味で, 線形写像について考えることは, 行列について考えることと同等です.

(iv) 数学的には, 集合とはいくつかの要素が (雑多に) 集まっているだけのもので, 要素の数が (然るべき意味で) 同じであれば区別されません. 例えば $\{\text{りんご}, \text{みかん}, \text{ぶどう}\}$ と $\{\text{いぬ}, \text{ねこ}, \text{うさぎ}\}$ は, どちらも数学

的には3つの要素を持つ集合というだけで区別されません。このような視点からは、集合について調べることと言えば、せいぜい要素の数を数えることくらいです。これに対しベクトル空間 V とは、和とスカラー倍という構造が入った集合です。この構造があるおかげで、この講義でやっているように、体系的に V を調べることができます。

写像は2つの集合に関連をつけるものとも考えられますが、雑多な集合の間の雑多な写像について数学的に調べられることは多くありません。構造の入った集合（例えばベクトル空間）の間の写像としては、その構造を保つ写像（例えば線形写像）を考えるのが筋の良い考え方で、そのような写像については、今後の講義で見ると、いろいろなことを体系的に調べることができます。構造の入った集合や写像に対象を絞ることで、理論が深まるわけです。