2018 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 9

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

1. 次の線形写像について，それが全射であるか，また単射であるか，判定せよ．
   (1) $f_1 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f_1(x, y) := x - y$
   (2) $f_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad f_2(x, y) := (x - y, 2x - y)$
   (3) $f_3 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \quad f_3(x, y) := (x - y, x - 2y, 2x - 3y)$
   (4) $f_4 \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad f_4(x, y, z) := (x - y + z, 2x - 2y + 2z, 3x - 3y + 3z)$
2. V, W をそれぞれ n 次元，m 次元のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{w}_i\}_{i=1}^m$ をそれぞれ V, W の基底とする．
   (1) $n \le m$ とする．線形写像 $f \colon V \to W$ を $f(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ で定める．つまり，一般の元 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i \in V$ に対しては $f(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^n x_i f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{w}_i$. このとき，$f$ は単射であることを示せ．
   (2) $n \ge m$ とする．線形写像 $g \colon V \to W$ を，$g(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le m)$, もし $n > m$ なら $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_m$ $(m + 1 \le j \le n)$ で定める．g は全射であることを示せ．
   (3) $n = m$ とする．線形写像 $h \colon V \to W$ を，$h(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{w}_i$ $(1 \le i \le n)$ で定める．h は同型であることを示せ．
3. (1) (i) $f \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $f(x, y, z) := (2x + y - z, x + 2y + 3z)$ で定める．f は全射であることを示せ．
   (ii) $\boldsymbol{v}_1 := (1, -1), \boldsymbol{v}_2 := (1, 1)$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．
   (iii) $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$ となる $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2)$ を 1 組求め，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立であることを示せ．
   (2) (i) $g \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を $g(x, y) := (x + y, x - y, 2x + 3y)$ で定める．g は単射であることを示せ．
   (ii) $\boldsymbol{v}_1 := (1, 1), \boldsymbol{v}_2 := (2, -1)$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．
   (iii) $\boldsymbol{w}_i := g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2)$ を計算し，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は 1 次独立であることを示せ．
4. x に関する n 次以下の実数係数多項式全体がなすベクトル空間を $\mathbf{R}[x]_{\le n}$ と書く．
   (1) $1, x, \dots, x^n \in \mathbf{R}[x]_{\le n}$ は $\mathbf{R}[x]_{\le n}$ の基底であることを示せ．
   (2) 同型写像 $\mathbf{R}[x]_{\le n} \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^{n+1}$ を 1 つ構成せよ．

補足．以下，$f \colon V \to W$ は線形写像です．

(i) f が線形であるとは，f が和とスカラー倍の構造を保つことである，と言えます．もし f が全単射でもあれば，V のベクトルと W のベクトルが，和とスカラー倍の構造も込みで，完全に一対一に対応するということです．このとき，V と W をベクトル空間として「同じもの」とみなします．この「同一視」を与える線形写像 f のことを同型写像と言い，同型写像が存在するとき，V と W は同型なベクトル空間である，と言って $V \cong W$ と書きます．V と W は異なるものですが，ベクトル空間としての構造だけを見れば同じものである，ということです．

(ii) 講義の系 7.13 (3) によれば，同型なベクトル空間は同じ次元を持ちます．逆に，今回の問題 2 (3) によれば，同じ次元のベクトル空間の間には同型写像を構成することができます．よって，**2 つのベクトル空間が同型であることは，次元が等しいことと同値です．**問題 4 はその例で，$\mathbf{R}[x]_{\le n}$ と $\mathbf{R}^{n+1}$ はもちろん全くの別物ですが，ベクトル空間の構造だけを見れば同じである，というわけです．

(iii) f が全射であるとは，各 $\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が少なくとも一つ見つかる，ということです．気持ちとしては，W に含まれる情報はすべて f を通じて V から来る，という感じです．これは V のほうが情報量が多くないと実現しない状況で，講義の系 7.13 (1) より $\dim V \ge \dim W$ であることは，このことを反映しているような感じです．

一方，f が単射であるとは，$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{v}) \ne \mathbf{0}$ である，ということです．気持ちとしては，f は V の $\mathbf{0}$ でない情報を損なうことなく（$\mathbf{0}$ にすることなく）W に伝える，という感じです．このとき W には V の情報をすべて受け入れる容量が必要で，講義の系 7.13 (2) より $\dim V \le \dim W$ であることは，このことを反映しているような感じです．